Universidade de Lisboa

Faculdade de Ciências

Departamento de Matemática

Problemas com desigualdades para o Ensino Secundário

Luísa Maria Alface da Costa Carvalho

DISSERTAÇÃO

Mestrado em Matemática para professores

Dissertação orientada pelo Prof. Dr. Pedro Jorge Santos Freitas

2012

À memória de meu pai

“Por forma a ser considerado excelente em matemática, ou noutra área do saber, o estudante deve dar-se conta, que a quase totalidade dos tópicos de estudo envolvem somente um pequeno número de ideias básicas”

André Weil

Agradecimentos

Agradeço a todos que de alguma forma contribuíram para a execução deste trabalho:

Ao professor orientador Dr. Pedro Jorge Santos Freitas, que me propôs este tema e deu-me oportunidade de desenvolver mais os meus conhecimentos. Obrigado por todos os conhecimentos que me transmitiu, pelos incentivos constantes e pela disponibilidade manifestada na orientação deste trabalho.

À minha mãe que me proporcionou a possibilidade de prosseguir os meus estudos e permitindo-me que aprofundasse os meus conhecimentos matemáticos, fazendo com que a matemática se tornasse numa paixão que pretendo partilhar com outros, nomeadamente os meus alunos.

Aos meus amigos, obrigado por tudo, vocês são a minha força e apoio.

Aos meus colegas, Vanda Cerejeira, Maria Fernanda Paz e Carlos Moura, pelo apoio na revisão deste trabalho.

Resumo

O tema afasta-se dos conteúdos escolares tradicionais e centra-se mais em questões complexas e interessantes, matéria em que a matemática é fecunda, devendo por isso ser abordado de um modo informal, num projeto de escola.

Serão apresentados alguns processos, métodos e conceitos sobre desigualdades, que são fundamentais para resolução de problemas de competições internacionais de Matemática e que poderão ser um bom ponto de partida para uma boa aprendizagem da matemática a um nível superior.

Os conceitos e resultados serão apresentados de forma encadeada de modo que conceitos e resultados novos recorram aos anteriores.

Os problemas selecionados são de competições internacionais, com grau de dificuldade variável, resolúveis através de resultados e processos fornecidos.

Este tema destina-se a ser abordado com alunos do ensino secundário mais dotados ou mais motivados para a Matemática, permitindo transmitir uma visão mais autêntica da Matemática, enriquecendo aqueles que têm interesse e que querem ir mais longe.

Foi utilizado um rigor formal moderado, compatível com o escalão etário dos alunos, de forma que conceitos e resultados sejam transmitidos de forma precisa, ainda que não necessariamente em linguagem formal.

Palavras-chave: desigualdades, problemas com desigualdades, resolução de problemas, competições internacionais de matemática.

Abstract

The subject moves away from traditional school subjects and focuses on issues more complex and interesting, area where mathematics is fruitful and should therefore be addressed in an informal way, in a school project.

It will be discussed some processes, methods and concepts about inequalities, which are fundamental to solving problems of international competitions in mathematics and that may be a good starting point for math learning in a higher level.

The concepts and results will be presented in a way that new concepts and results would apply to the previous ones.

The problems selected are of international competitions, with variable degree of difficulty, solved though results and processes provided.

This theme is intended to be approached with gifted students more motivated for Mathematics, making possible a more authentic Mathematics, enriching those who are interested and want to go further.

It was used a formal rigor moderate, consistent with the age group of students, so that concepts and results are communicated accurately, though not necessarily in formal language.

Keywords: inequalities, problems with inequalities, problem solving, international mathematics competition

Índice

Problemas com História

As desigualdades surgiram desde que se sentiu necessidade ordenar, talvez quando se começou a usar os números, a fazer medições, aproximações ou até procurando limites. Assim, as desigualdades têm um papel muito distinto na evolução da matemática.

O estudo das desigualdades, calcula-se que tenha começado no século IV a.C. e durante muitos séculos não se conhecia nenhum método uniforme para determinar para determinar máximos ou mínimos. Os primeiros métodos surgiram no século XVII.

Ao longo da história da matemática surgiram muitos problemas de desigualdades, envolvendo grandes matemáticos como Euclides, Arquimedes, Heron, Tartaglia, Johanne Jakob Bernoulli, Newton entre outros.

Não conseguindo localizar no tempo quando surgiram as desigualdades, pareceu-me oportuno fazer uma apresentação histórica de alguns problemas de otimização que poderão ser apresentados aos alunos do ensino secundário.

Problema de Euclides

O que se pensa ser o mais antigo problema de optimização e que se encontra tratado na obra de *Elementos* de Euclides, no século IV a.C. é vulgarmente designado por problema de Euclides, poderá ter o seguinte enunciado simplificado:

"De todos os retângulos com o mesmo perímetro, qual tem área máxima? "

Euclides (330 a.C.- 260 a.C.) foi um dos primeiros geómetras e é reconhecido como um dos matemáticos mais importantes da Grécia Clássica e de todos os tempos.
Existem poucas informações sobre a sua vida. Foi chamado para ensinar Matemática na escola criada por Ptolomeu Soter (306 a.C. - 208 a.C.) em Alexandria, mais conhecida por "Museu".
Embora se tenham perdido mais de metade dos seus livros, ainda restam, para felicidade dos séculos vindouros, os treze famosos livros que constituem os Elementos, publicados por volta de 300 a.C..

O problema acima destacado, surge como adaptação da proposição 27 que se encontra no livro VI, dos Elementos de Euclides, que poderá ser interpretada como um problema de optimização.

Livro VI – Proposição 27

De todos os paralelogramos aplicados a uma mesma recta e com defeitos de figuras paralelogramas semelhantes à figura descrita sobre a metade da dita recta, e semelhantemente postas, o máximo é aquele que é aplicado à metade da mesma recta, e é semelhante à figura paralelograma que falta.

Esta proposição encontra-se demonstrada na obra, com base em comparação de áreas mas não vou fazer referência à mesma por ser de complexa compreensão e fugir ao tema do projecto.

Para explorar este assunto, vou propor o seguinte exercício:

Considere todos os retângulos com perímetro 24 unidades e procure qual é que tem maior área.

Este problema é semelhante ao problema do paralelogramo particularizado a um rectângulo. Apresenta um enunciado muito mais simples que o de Euclides e possibilita formas diferentes de resolução.

Algebricamente, pode-se partir de um quadrado de lado 6 unidades e calcular-se a área de sucessivos rectângulos, com o mesmo perímetro, alterando o comprimento e a largura, verificando-se que estes têm uma área inferior à do quadrado de lado 6 unidades.

Vejamos:

6 x 6 = 36

7 x 5 = 35………………………………………………………………….. (6 + 1) (6 – 1) = 35

8 x 4 = 32………………………………………………………………….. (6 + 2) (6 – 2) = 32

9 x 3 = 27………………………………………………………………….. (6 + 3) (6 – 3) = 24

10 x 2 = 20……………………………………………………………… (6 + 4) (6 – 4) = 20

11 x 1 = 11 ……………………………………………………………….. (6 + 5) (6 – 5) = 20

Podemos observar que (6 + a) (6 – a) é menor à medida que o <u>a</u> aumenta, tomando o valor máximo para a = 0.

Esta resolução está de acordo com um resultado estabelecido por Euclides:

“Se p+q for constante, então p x q é máximo quando p = q.”

Todos os resultados acima correspondem a rectângulos com o mesmo perímetro (o perímetro é 24 unidades), podemos considerar a soma constante e o de maior área é o quadrado com 6 unidades de lado, daí o produto ser máximo quando os valores são iguais.

Podemos ainda usar a calculadora gráfica ou outro software, para resolução deste problema.

Basta considerar uma família de rectângulos cujo comprimento e a largura somam 12 unidades. Se a largura dos retângulos for x unidades o comprimento será $(12-x)$ unidades.

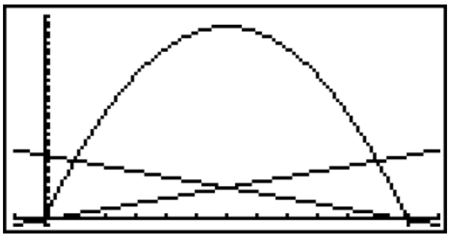
Introduzindo na calculadora, ou utilizando outro software, as funções:

$y_1 = x$

$y_2 = 12 - x$

$y_3 = y_1 \times y_2$

Obtemos os seguintes gráficos:



A linha curva – uma parábola – corresponde à representação gráfica da função definida por $y = x \times (12 - x)$, ou seja , a função que representa a área do rectângulo de largura x unidades e comprimento $(12 - x)$ unidades .

A leitura das coordenadas do vértice da parábola, ponto correspondente ao valor máximo da função, conduz-nos a $x = 6$ e $y = 36$ (este último é o valor da área máxima).
Concluímos então que a área é máxima para uma largura de 6 unidades e um comprimento de 6 unidades (12 – 6 unidades), ou seja na família de rectângulos o que tem maior área é o quadrado.

Problema de Dido

Um outro problema com história, surge de uma lenda grega que é conhecida por nós através de um poema épico latino presente na obra “A Eneida” (Aeneis em latim) escrito por um dos maiores poetas da Roma antiga, Publius Virgilius Maro,no século I a.C..

Dido era uma rainha da cidade fenícia de Tiro (actual Líbano). Dido deixou a cidade depois do irmão ter assassinado o seu marido, com destino à baia da Tunísia, no Mediterrâneo.

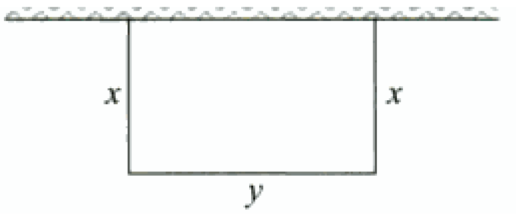
Dido quando chegou decidiu comprar a terra ao seu patrono, o Rei Jarbas, para que ela e o seu povo se pudessem instalar, pagando-lhe uma quantia em dinheiro, por uma quantidade de terra que se conseguisse cercar com uma pele de boi.

Para obter a maior quantidade de terra possível, Dido cortou a pele de boi em tiras finas, como está ilustrado numa tela do século VII, na figura abaixo, e dispôs estas tiras de modo a formar um semicírculo. Fundou assim a cidade de Cartago (que se situa ao lado da actual cidade de Tunes na Tunísia).

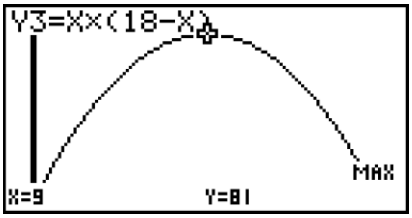
Muitos pesquisadores são da opinião que este problema de área máxima conservando o perímetro, denominado Problema de Dido ou Problema isoperimétrico, foi o primeiro a ser discutido em literatura científica, pelas propriedades isoperimétricas do círculo, pois de todas as figuras planas com o mesmo perímetro é o que limita a maior área.

Uma das adaptações deste problema que podemos considerar como um Problema de Dido é o seguinte:

De entre todos os rectângulos com o mesmo perímetro, qual é o que tem área máxima?



Este problema é também uma boa actividade de investigação e tal como o problema de Euclides pode ter vários tipos de abordagens.
Se por exemplo considerarmos agora, um rectângulo de perímetro 36 cm, se x e y são as suas dimensões, sabemos que $2x + 2y = 36$ e por isso $x + y = 18$, ou seja $y = 18 - x$.
Sabendo que a área é o produto do comprimento pela largura procuramos, para resposta ao problema, o máximo de $(18 - x) \times x$.
Consideremos $f(x) = (18 - x) \times x$.
O gráfico da função é o seguinte:



A representação gráfica da função que representa a área do rectângulo de largura x unidades e comprimento $(18 - x)$ unidades é uma parábola.

A leitura das coordenadas do vértice da parábola, ponto correspondente ao valor máximo da função, conduz-nos a $x = 9$ e $y = 81$ (este último é o valor da área máxima).

Concluindo então que a área é máxima para uma largura de 9 unidades e um comprimento de 9 unidades (18 – 9 unidades), assim sendo, de entre todos os rectângulos com o perímetro 36 unidades, o que tem área máxima é o quadrado de lado 9 unidades.

No exemplo anterior fizemos o estudo da função quadrática

$f(x) = (18 - x) \times x = -x^2 + 18x$.

Uma outra proposta de desenvolvimento poderá ser considerarmos todos os retângulos com perímetro p unidades , sendo x_1 e x_2 as medidas dos seus lados. Como queremos maximizar a área vamos encontrar as soluções possíveis de uma equação do 2º grau que satisfaçam este problema, ter perímetro de p unidades. Iremos observar que em todas as possibilidades a que tem área máxima é sempre o quadrado.

Sabemos que qualquer equação do 2º grau, da forma $ax^2 + b\,x + c = 0$, com $a \neq 0$ tem no máximo duas soluções, sejam elas x_1 e x_2 .

$x_1 = \frac{-b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}$

com $b^2 - 4\,ac \geq 0$.

Sempre que existem estas soluções podemos afirmar que:

$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$ e $x_1 \times x_2 = \left(\frac{-b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{b^2 - 4\,ac}}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2 - 4\,ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$.

Por outro lado, podemos obter uma equação equivalente à apresentada acima que nos permita provar o que pretendemos, isto é,

$$ax^2 + b\,x + c = 0 \underset{a \neq 0}{\Longleftrightarrow} a\left(x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

$\Leftrightarrow a\,(x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2) = 0$ (1)

Sabendo que x_1 e x_2 as dimensões de todos os retângulos com perímetro de p unidades, podemos dizer que

$$2(x_1 + x_2) = p \Leftrightarrow x_1 + x_2 = \frac{p}{2}$$

Como $a \neq 0$, a equação só tem soluções que satisfaçam

$x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2 = 0$

Para isso é condição necessária que

$[-(x_1+x_2)]^2 - 4x_1\,x_2 \geq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{p}{2}\right)^2 - 4x_1\,x_2 \geq 0$, uma vez que $x_1 + x_2 = \frac{p}{2}$ e $x_1\,x_2$ representa a área do rectângulo, podemos assim concluir que :

$$\frac{p^2}{4} - 4x_1\,x_2 \geq 0 \Leftrightarrow x_1\,x_2 \leq \frac{p^2}{16}$$

Ou seja, o maior valor que a área pode tomar é $\left(\frac{p}{4}\right)^2$ unidades, que é um quadrado perfeito e por isso de todos os rectângulos com perímetro p o que tem maior área é o quadrado de medida de lado $\frac{p}{4}$.

Aplicando este caso geral aos rectângulos com perímetro de 36 unidades o que tem maior área é o quadrado de lado 9 unidades, como tinha sido observado anteriormente.

Ainda dentro do conteúdo problemas com história , parece-me oportuno a introdução de uma proposição com história, importante para demonstrações e que tem o nome de Desigualdade triangular.

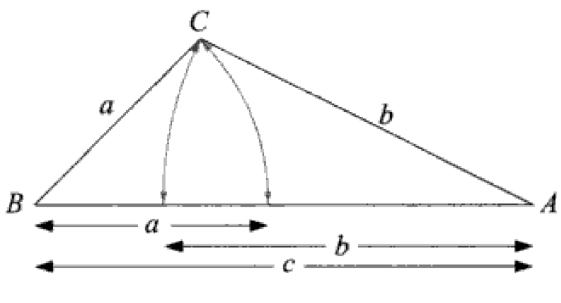
<u>Desigualdade triangular</u>

A desigualdade triangular tem origem na geometria euclidiana e refere-se ao teorema que afirma que, num triângulo, o comprimento de um dos lados é sempre inferior à soma dos comprimentos dos outros dois lados.

Este teorema é a Proposição 20 do Livro I dos “Elementos de Euclides”

Sejam *a*, *b* e *c* os comprimentos dos três lados de qualquer triângulo [ABC], tem-se que:

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} > c$, $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c} > a$ **e** $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c} > b$ **.**



Ou de um modo equivalente:

$a > |b - c|\,, \qquad b > |a - c|\,, \qquad c > |b - a|$

Podemos ainda estabelecer que:

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) > 0$$

Esta propriedade é deduzida a um nível básico de ensino, surgindo como conclusão de actividades de investigação sobre a possibilidade de construção de um triângulo conhecendo as medidas dos seus lados.

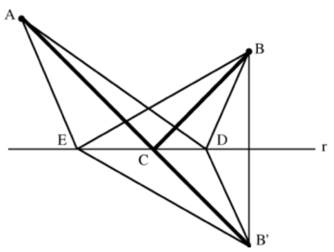
Problema de Heron de Alexandria

Um outro problema, surge uns séculos mais tarde, mas desta vez com o objetivo de encontrar um mínimo e deve-se ao matemático Heron de Alexandria (10 d.C. – 70 d.C.).

"Dados dois pontos A e B, complanares com uma recta, r, e ambos do mesmo lado da recta, determinar um ponto C, da recta, tal que a soma das distâncias de A a C e de C a B seja mínima."

Para resolver este problema consideramos B' o ponto simétrico de B em relação a r e unimos B' com A, encontrando assim o ponto C que é o ponto de intersecção do segmento [AB'] com r.

Podemos considerar os pontos D e E sobre a reta r, como mostra a representação em baixo e verificar que para qualquer um deles a soma das distâncias é maior.



Para estra prova, usa-se a desigualdade triangular.

$$|AD| + |DB| = |AD| + |DB'| \geq |AB'| = |AC| + |CB'|$$

$$|AE| + |EB| = |AE| + |EB'| \geq |AB'| = |AC| + |CB'|$$

Princípios básicos

Os números reais têm uma ordem e foi por isso possível estabelecer alguns princípios básicos para desigualdades entre dois números reais, um conceito prévio essencial para a compreensão de desenvolvimentos posteriores.

Propriedade Reflexiva

$x \leq x, \forall x \in \mathbb{R}$

Propriedade de anti-simetria:

Se $x \leq y$ e $y \leq x$ então $x = y$

Propriedade Transitiva:

Se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $x \leq z$

Propriedade da tricotomia:

$\forall x, y, \in \mathbb{R} : x < y \lor x = y \lor x > y$

Propriedade da adição

Se $x \geq y$ e $a \geq b$ então $x + a \geq y + b$

Propriedade da multiplicação

Se $x \geq y$ e $a \geq 0$ então $ax \geq a\, y$

Se $x \geq y$ e $a < 0$ então $ax \leq a\, y$

Propriedade do recíproco

Se $x \geq y$ então $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{y}$ com $x, y > 0$

Desigualdades úteis para resolver problemas de optimização

Desigualdade de Cauchy

Começo por abordar um desenvolvimento simples e com interesse que dá origem a um caso particular da desigualdade de Cauchy-Schwarz, quando apenas se consideram dois elementos, designada por alguns autores como "Desigualdade de Cauchy".

Sabendo que:

$(x-y)^2 \geq 0, \forall\, x\,, y\ \in \mathbb{R}$,

podemos , por desenvolvimento do quadrado do binómio, verificar que:

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow\ x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \geq xy \Leftrightarrow$$

$$\boxed{xy\ \leq\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}}$$

Verificando-se a igualdade se e só se $x = y$.

Esta desigualdade é a que designei como Desigualdade de Cauchy.

Em 1821, Augustin-Louis Cauchy, matemático francês que viveu entre 1789 e 1857, publicou uma desigualdade para somas que foi redescoberta por Karl Hermann Amandus Schwarz , em 1888, matemático alemão que viveu entre 1843 e 1921.

A desigualdade :

$$x_1\, y_1 +\ x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots +\ {x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots +\ {y_n}^2}$$

é hoje conhecida como desigualdade de Cauchy- Schwarz.

Verifica-se para *n* =1 e para *n* =2 vamos obter a expressão que se encontra acima e a qual foi designada por Desigualdade de Cauchy:

$$x_1\, y_1 +\ x_2\, y_2 \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2}\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1\, y_1 +\ x_2\, y_2)^2 \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2)$$

$$\Leftrightarrow (x_1\, y_1)^2 +\ 2\, x_1\, y_1 x_2\, y_2 + (x_2\, y_2)^2 \leq (x_1\, y_1)^2 +\ (x_2\, y_2)^2 +\ (x_1\, y_2)^2 + (\ x_2\, y_1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\, x_1\, y_2 x_2\, y_1 \leq (x_1\, y_2)^2 + \ (x_2\, y_1)^2 \Leftrightarrow x_1\, y_2 x_2\, y_1 \leq \frac{(x_1\, y_2)^2}{2} + \frac{(x_2\, y_1)^2}{2}$$

$$\underset{\substack{x = x_1\, y_2 \\ y = x_2\, y_1}}{\Longleftrightarrow} \ xy \ \leq \ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$

Em termos geométricos esta desigualdade indica que , <u>qualquer que seja o rectângulo de medidas x e y, a sua área não pode ser maior que a média aritmética das áreas de dois quadrados de lados x e y, respectivamente</u>.

Do desenvolvimento anterior, podemos obter um resultado interessante e útil nalgumas demonstrações e resolução de problemas com desigualdades.

Sabendo que :

$$x^2 + y^2 \geq 2xy \ \underset{\substack{x,y > 0 \\ \div xy}}{\Longleftrightarrow} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$$

Esta desigualdade indica que **a soma de um número com o seu inverso é sempre superior ou igual a 2**, válida para qualquer número inteiro positivo.

A igualdade surge quando $x = y$.

Observemos que, se por exemplo $x = 2$ e $y = 5$,

$\frac{2}{5} + \frac{5}{2} = 2{,}9 > 2.$

<u>Desigualdade de Cauchy-Schwarz para 3 números</u>

Para $n = 3$, sendo $x_1\,, x_2, x_3$ e $y_1\,, y_2, y_3$ dois conjuntos de números reais

$$x_1\, y_1 + \ x_2\, y_2 + x_3\, y_3 \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2}\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2}$$

$$\Leftrightarrow (x_1\, y_1 + \ x_2\, y_2 + x_3\, y_3)^2 \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2)$$

Sabemos que para qualquer número real

$$0 \leq (x_1\, y_2 - x_2\, y_1)^2 + \ (x_1\, y_3 - x_3\, y_1)^2 + \ (x_2\, y_3 - x_3\, y_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\, x_1\, x_2\, y_1 y_2 + x_1 x_3 y_1 y_3 + x_2\, x_3\, y_2 y_3) \\ \leq {x_1}^2{y_2}^2 + {x_2}^2{y_1}^2 + {x_1}^2{y_3}^2 + {x_3}^2{y_1}^2 + {x_2}^2\, {y_3}^2 + {x_3}^2{y_2}^2$$

$$\Leftrightarrow 2(\, x_1\, x_2\, y_1 y_2 + x_1 x_3 y_1 y_3 + x_2\, x_3\, y_2 y_3) + (x_1 y_1)^2 + \ (x_2 y_2)^2 + (x_3 y_3)^2 \leq$$

$$\leq {x_1}^2{y_2}^2 + {x_2}^2{y_1}^2 + {x_1}^2{y_3}^2 + {x_3}^2{y_1}^2 + {x_2}^2\,{y_3}^2 + {x_3}^2{y_2}^2 + (x_1y_1)^2 + \ (x_2y_2)^2 + (x_3y_3)^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1\,y_1 + \ x_2\,y_2 + x_3\,y_3)^2 \leq ({x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2)({y_1}^2 + {y_2}^2 + {y_3}^2)$$

dando-se a igualdade quando $x_i\,y_j = x_j\,y_i$ para $i,j = 1{,}2{,}3$.

Validando assim a desigualdade de Cauchy-Schwarz para $n = 3$.

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para n números

Para mostrar a validade da desigualdade para n valores, vamos usar a indução matemática. Sabendo que a desigualdade é validada para $n = 2$ e supondo que se verifica para n valores vamos mostrar que isso implica que se verifique para $n + 1$ valores.

Para $n = 2$ a desigualdade encontra-se verificada em cima.

Para n valores :

Sejam $x_1\,, x_2, \dots, x_n$ e $y_1\,, y_2, \dots, y_n$ dois conjuntos de números reais, tem-se

$$x_1\,y_1 + \ x_2\,y_2 + \cdots + x_n\,y_n \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + \ {x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + \ \ {y_n}^2}$$

dando-se a igualdade quando $x_i\,y_j = x_j\,y_i$ para $i,j = 1{,}2, \dots, n$.

Queremos mostrar que se verifica para $n + 1$ valores, ou seja, para $x_1\,, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}$ e $y_1\,, y_2, \dots, y_n\,, y_{n+1}$ dois conjuntos de números reais, tem-se:

$$x_1\,y_1 + \cdots + x_n\,y_n + x_{n+1}\,y_{n+1} \leq \sqrt{{x_1}^2 + .. + {x_n}^2 + \ {x_{n+1}}^2}\sqrt{{y_1}^2 + \cdots + \ \ {y_n}^2 + \ {y_{n+1}}^2}$$

Por hipótese de indução:

$$(x_1\,y_1 + \cdots + x_n\,y_n) + x_{n+1}\,y_{n+1} \leq \ \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + \ {x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2 + \cdots + \ \ {y_n}^2} + x_{n+1}\,y_{n+1}$$

Se tomarmos $a = \sqrt{{x_1}^2 + \cdots + \ {x_n}^2}$ e $b = \sqrt{{y_1}^2 + \cdots + \ {y_n}^2}$ pela aplicação da desigualdade para $n = 2$ verificamos que

$$ab + \ x_{n+1}\,y_{n+1} \leq \sqrt{a^2 + {x_{n+1}}^2}\sqrt{b^2 + {y_{n+1}}^2}$$

$$\Leftrightarrow x_1\,y_1 + .. + x_n\,y_n + x_{n+1}\,y_{n+1} \leq \sqrt{{x_1}^2 + .. + {x_n}^2 + \ {x_{n+1}}^2}\sqrt{{y_1}^2 + .. + \ {y_n}^2 + \ {y_{n+1}}^2}$$

A igualdade quando $x_i\,y_j = x_j\,y_i$ para $i,j = 1{,}2, \dots, n, n + 1$.

Ficando assim mostrado que a desigualdade de Cauchy –Schwarz é verdadeira para n valores.

Exercícios propostos

1. Mostre que para qualquer número real a, b, c:

$$a^2 + \ b^2 + c^2 \ \geq ab + bc + ca$$

2. Mostre que qualquer seja o valor de x, se verifica:

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

3. Prove que

$$\sqrt{{x_1}^2 + \cdots + \ {x_n}^2} + \sqrt{{y_1}^2 + \cdots + \ \ {y_n}^2} \geq \sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \cdots + \ (x_n + y_n)^2}$$

Proposta de resolução

1. Partindo do desenvolvimento que demonstra a Desigualdade de Cauchy, podemos observar que :

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$(b - c)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ b^2 - 2bc + c^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 \geq 2bc$$

$$(c - a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \ c^2 - 2ca + a^2 \geq 0 \Leftrightarrow c^2 + a^2 \geq 2ca$$

Usando o princípio de equivalência da adição e da multiplicação (ou divisão), verificamos que:

$$a^2 + b^2 + \ b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \Leftrightarrow$$

$$2\,a^2 + 2\,b^2 + 2c^2 \geq 2ab + 2bc + 2ca \underset{\div 2}{\Leftrightarrow} a^2 + \ b^2 + c^2 \ \geq ab + bc + ca$$

2. Para qualquer valor de x,

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \times \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$= \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

Pois vimos anteriormente que a soma de um número com o seu inverso é sempre maior ou igual a 2.

3. Se considerarmos dois vetores $\vec{a},\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{a} = x_1\ , x_2, \dots , x_n$ e $\vec{b} = y_1\ , y_2, \dots , y_n$ sabemos que se verifica a desigualdade pois $\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| \geq \|\vec{a} + \vec{b}\|$, pela desigualdade triangular.

Por outro lado, podemos elevar ambos os membros ao quadrado e simplificando obtemos a desigualdade de Cauchy-Schwarz, tornando assim válida a desigualdade que se pretende provar.

$$\left(\sqrt{{x_1}^2 + \dots + {x_n}^2} + \sqrt{{y_1}^2 + \dots + {y_n}^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{(x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}{x_1}^2 + \dots + {x_n}^2 + 2\sqrt{{x_1}^2 + \dots + {x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2 + \dots + {y_n}^2} + {y_1}^2 + \dots + {y_n}^2 \\ \geq (x_1 + y_1)^2 + \dots + (x_n + y_n)^2\end{aligned}$$

$$2\sqrt{{x_1}^2 + \dots + {x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2 + \dots + {y_n}^2} \geq 2(x_1\, y_1 + \dots + x_n\, y_n)$$

$$\sqrt{{x_1}^2 + \dots + {x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2 + \dots + {y_n}^2} \geq x_1\, y_1 + \dots + x_n\, y_n$$

Desigualdades das médias

As desigualdades mais utilizadas na resolução de problemas, nomeadamente em competições internacionais de matemática são as que se designam por **“**Desigualdades das médias**”.**

Associadas a estas desigualdades estão vários processos de encontrar valores médios entre conjuntos de números, que depende da forma como os números se relacionam uns com os outros. Vamos considerar a média aritmética, que é a mais conhecida e provavelmente a mais utilizada, a média quadrática, a média geométrica e a média harmónica.

Dados dois números não negativos, podemos obter:

- A sua média aritmética, que será o quociente da soma dos dois números por dois;

- A sua média quadrática, fazendo a raiz quadrada do quociente da soma dos quadrados dos dois números por dois;
- A sua média geométrica determinando a raiz quadrada do produto dos dois números;
- A sua média harmónica que é o inverso da média aritmética dos inversos dos números.

Se pensarmos, por exemplo, nos números 1 e 2 podemos verificar que :

Média aritmética - $\frac{1+2}{2} = 1{,}5$

Média quadrática - $\sqrt{\frac{1^2+2^2}{2}} = 1{,}58 \ldots$

Média geométrica - $\sqrt{1 \times 2} = 1{,}41 \ldots$

Média harmónica - $\frac{1}{\frac{\frac{1}{2}+1}{2}} = \frac{2}{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} = 1{,}33 \ldots$

e com esta abordagem simplista, podemos prever que a média harmónica é a menor da médias e a média quadrática a maior das médias.

Em cada um dos desenvolvimentos será feita uma breve descrição do modo como poderão ser utilizadas as médias e a forma com se relacionam umas com as outras.

As demonstrações seguintes permitirão provar outras desigualdades, nomeadamente, as que são propostas em problemas de competições matemáticas, por exemplo, nas Olimpíadas da Matemática.

Desigualdade das médias aritmética e geométrica (MA-MG) para dois valores

A média aritmética (MA) é a média mais utilizada e mais conhecida do senso comum. É usada quando cada um dos valores em questão tem o mesmo peso, bastando fazer o quociente da soma de todos os valores pelo número de valores observados. A média aritmética entre dois valores *a* e *b* é dada pela expressão:

$$MA = \frac{a+b}{2}$$

A média geométrica (MG) é a segunda média mais comum, aplicada quando se quer determinar índices ou factores médios. A média geométrica entre dois valores *a* e *b* é dada pela expressão:

$$MG = \sqrt{ab}$$

É utilizada em cálculo financeiro, se se fizer por exemplo um investimento em dinheiro, em que se ganha por uma quantia X, 25% no primeiro ano, isto é, no primeiro ano tem-se a quantia 1,25X e no segundo ano ganha-se 80% da quantia X, ou seja 1,80X a média da taxa anual de juro determina-se pela média geométrica, isto é:

$\sqrt{1.25 \times 1.80} = 1.50$

o que corresponde a uma taxa média anual de juro de 50%.

O cálculo da média aritmética não era adequado no exemplo anterior, pois os dois valores não têm o mesmo peso, erradamente poderíamos pensar que a taxa média anual de juro seria

$\frac{1.25+1.80}{2} = 1.525$,

o que significava uma taxa média anual de juro de 52,5%.

Podemos verificar que para quaisquer dois números positivos, a média aritmética é sempre maior que a média geométrica. Esta relação de ordem pode ser verificada por vários processos e todos eles contribuem de um modo muito enriquecedor para um estudo mais profundo das desigualdades.

Sendo $a, b > 0$, dois números quaisquer positivos, queremos verificar que :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Esta desigualdade é conhecida por “Média aritmética – Média geométrica” (ou simplesmente MA-MG).

Quando $a, b < 0$ não se verifica a desigualdade pois o quociente será o número negativo, que nunca poderá ser superior a um número positivo (a raiz quadrada de um produto de números negativos é um número positivo).

De um modo simples podemos verificar que

$\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$, verificando assim $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$.

Podemos também, utilizar a desigualdade de Cauchy, com uma mudança de variável para chegar à expressão conhecida como MA-MG, observando que se verifica para $a, b > 0$.

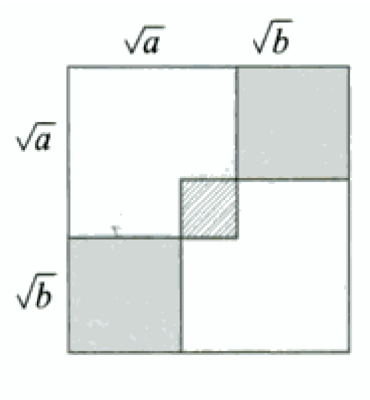
Vejamos:

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \underset{\substack{x^2=a \\ y^2=b}}{\Longleftrightarrow} \sqrt{a}\sqrt{b} \leq \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

$$\boxed{\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \forall\, a, b > 0}$$

Geometricamente, também podemos verificar a desigualdade.

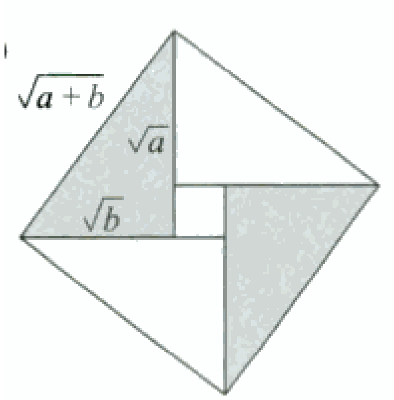
Se por exemplo considerarmos um quadrado cujas medidas do lado são $(\sqrt{a} + \sqrt{b})$, podemos observar que:



$$\boxed{2\left(\sqrt{a}\right)^2 + 2\left(\sqrt{b}\right)^2 \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b}\right)^2 \Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{a} + \mathrm{b} \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a}+\mathrm{b}}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Um outro exemplo, onde de uma forma simples podemos verificar a desigualdade da Média aritmética – Média geométrica, é aquele em que as medidas do lado do quadrado são $\sqrt{a+b}$.



Podemos decompor este triângulo em quatro triângulos rectângulos de base $\sqrt{b}$ e altura $\sqrt{a}$ e num quadrado de área $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$, como se pode observar na figura .

Por observação directa da figura, verifica-se que as áreas se relacionam da seguinte forma:

$$\boxed{\left(\sqrt{a+b}\right)^2 \geq 4 \times \frac{\sqrt{a}\,\sqrt{b}}{2} \Leftrightarrow}$$

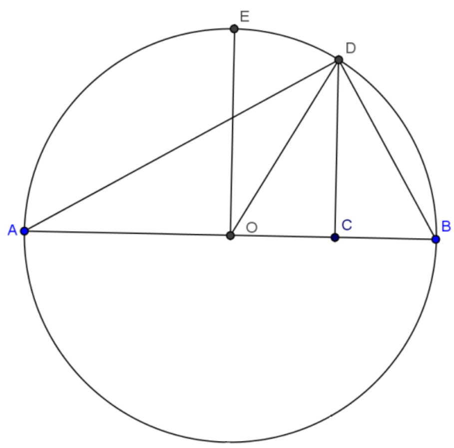
$$\Leftrightarrow \mathrm{a} + \mathrm{b} \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a+b}}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Um outro desenvolvimento interessante verifica-se se multiplicarmos ambos os membros da desigualdade (MA-MG) por 4 :

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}, \forall\, a,b > 0 \underset{4\times}{\Leftrightarrow} 4\sqrt{ab} \leq 2a + 2b$$

a desigualdade obtida indica, em termos geométricos, que considerando todos os retângulos de área ab, o quadrado de medida de lado $\sqrt{ab}$ tem sempre menor perímetro que outro rectângulo de dimensões a e b.

Existe ainda uma outra forma de verificar a relação de ordem entre as desigualdades das médias, através da figura abaixo.



Para construir a figura começamos por considerar um segmento de recta AB e neste segmento vamos considerar um ponto C, que divide o segmento de recta AB em dois segmentos, um de comprimento $\overline{AC}$ e outro de comprimento $\overline{BC}$.

Depois de encontrar o ponto médio do segmento de recta AB, O, constrói-se a circunferência de centro em O e diâmetro AB.

Para obter o ponto E, pertencente à circunferência, traça-se um segmento de recta perpendicular ao diâmetro e que contenha o centro de circunferência, para obter o ponto D traça-se um segmento de recta perpendicular ao diâmetro e que contenha C.

Para podermos provar as desigualdades vamos traçar os segmentos de recta OD, AD e BD e considerar os três triângulos [ACD], [COD] e [BCD] .

Tomamos $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$ e $\overline{CD} = c$ .Os triângulos [ACD] e [BCD] são semelhantes, pelo modo como foram construídos. Como [ACD] e [BCD] são semelhantes, as medidas dos lados correspondentes são proporcionais e assim:

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow c^2 = ab \Leftrightarrow c = \sqrt{ab}$$

O raio [OE], tem como comprimento $\overline{OE} = \frac{a+b}{2}$ $(= \overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OD})$ (1)

Podemos interpretar o comprimento do raio como sendo a média aritmética dos valores a e b.

$\overline{CD} = \sqrt{ab}$ tem como expressão analítica o valor da média geométrica dos valores a e b.

Por observação directa da figura construída podemos verificar que a média aritmética é sempre maior ou igual à média geométrica, pelo modo como foi construída, o maior valor que pode obter é o da média aritmética.

Analiticamente, tendo em conta que a maior das cordas numa circunferência é o diâmetro, verificamos que $2\sqrt{ab} \leq a+b \Leftrightarrow \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$

Ficando assim demonstrada a desigualdade MA-MG, verificando-se a igualdade quando $a = b$.

Desigualdade MA-MG para três valores

Começamos por determinar a média aritmética e a média geométrica entre os números 1, 2 e 4:

MA= $\frac{1+2+4}{3} = 2,(3)$

MG= $\sqrt[3]{1.2.4} = 2$

Verificamos assim que MA > MG, neste exemplo concreto.

Para provarmos que esta relação se verifica para quaisquer 3 números, consideremos $a, b, c \geq 0$. Pretendemos mostrar que:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Para remover a raiz cúbica consideremos a seguinte mudança de variável

$a = x^3, b = y^3 \ e \ c = z^3$

E mostremos que $\frac{x^3+y^3+z^3}{3} \geq xyz$

$$\frac{x^3+\ y^3+z^3}{3} \geq xyz$$

$$\Leftrightarrow x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0 \Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$$

pois: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz)$

O fator $(x + y + z)$ é não negativo para $x = y = z$.

Para provar $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$, basta verificar

$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0$.

Verifiquemos então que:

$$(x-y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\,xy \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2\,xy$$

$$(x-z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 - 2\,xz \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + z^2 \geq 2\,xz$$

$$(y-z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 - 2\,yz \geq 0 \Leftrightarrow y^2 + z^2 \geq 2\,yz$$

$$(x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2\,xy + x^2 + z^2 - 2\,xz + y^2 + z^2 - 2\,yz \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0$$

Mostrámos assim que

$$\frac{x^3 + y^3 + z^3}{3} \geq xyz$$

A igualdade dá-se quando $x = y = z$.

Temos assim para quaisquer $a, b, c \geq 0$,

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$$

Dando-se a igualdade quando $a = b = c$.

A desigualdade MA-MG verifica-se para 3 números.

Na demonstração da Desigualdade MA-MG, usamos um resultado importante para utilização nas competições matemáticas:

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + xz + yz$$

válido para qualquer $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Desigualdade MA-MG para quatro, oito,…, 2^k valores

Começamos por determinar a média aritmética e a média geométrica entre os números 1, 2 , 8 e 9:

MA= $\frac{1+2+8+9}{4} = 5$

MG= $\sqrt[4]{1.2.8.9} \cong 3{,}5$

Verificamos assim que MA > MG, neste exemplo concreto.

Para provarmos que esta relação se verifica para quaisquer 4 números, vamos para da desigualdade para 2 números, isto é:

$$\forall\, a, b \geq 0,\ \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

e consideremos $a = \frac{a_1+a_2}{2}$ e $b = \frac{a_3+a_4}{2}$ onde $a_1, a_2, a_3, a_4 \geq 0$.

Substituindo estes valores na MA-MG para dois valores, temos:

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)\left(\frac{a_3+a_4}{2}\right)}$$

Por outro lado verifica-se : $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$ e $\frac{a_3+a_4}{2} \geq \sqrt{a_3 a_4}$.

Dando se a igualdade quando $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Podemos então verificar que

$$\frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_3+a_4}{2}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2}\sqrt{a_3 a_4}} \Leftrightarrow \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

verificando-se a igualdade quando $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$.

Mostrámos assim que a desigualdade MA-MG é válida para 4 números.

Pelo mesmo processo verifica-se a desigualdade para 8, 16, 32,…, 2^k.

Vou provar para 8 números para facilitar a compreensão da generalização para n números.

Sabendo que a desigualdade MA-MG se verifica para 4 números, consideremos:

$$a_1 = \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \sqrt{b_1 b_2}$$

$$a_2 = \frac{b_3 + b_4}{2} \geq \sqrt{b_3 b_4}$$

$$a_3 = \frac{b_5 + b_6}{2} \geq \sqrt{b_5 b_6}$$

$$a_4 = \frac{b_7 + b_8}{2} \geq \sqrt{b_7 b_8}$$

Onde $b_i (i = 1, \dots, 8)$ são números não negativos.

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{b_1+b_2}{2} + \frac{b_3+b_4}{2} + \frac{b_5+b_6}{2} + \frac{b_7+b_8}{2}}{4} \geq \sqrt[4]{\sqrt{b_1 b_2}\sqrt{b_3 b_4}\sqrt{b_5 b_6}\sqrt{b_7 b_8}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 + b_8}{8} \geq \sqrt[8]{b_1 b_2 b_3 b_4 b_5 b_6 b_7 b_8}$$

A igualdade dá-se quando $b_i (i = 1, \dots, 8)$ são todos iguais.

Vamos agora mostrar que a desigualdade se verifica para um número $n = 2^k$ valores. Já vimos que a desigualdade se verifica para n=2,4 e 8.

Vamos fazer a demonstração por indução. Sabemos que é valida para $k = 1$, vamos supor que se verifica para $n = 2^k$ e mostrar que ainda é válida para $n = 2^{k+1}$.

Como $2^{k+1} = 2.2^k$, apenas temos de provar que a desigualdade se verifica para 2n, para verificarmos ser válida para qualquer número par de valores.

Sabendo que $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$

Sejam $b_i (i = 1, \dots, 2n)$ são números não negativos, tais que:

$$a_1 = \frac{b_1 + b_2}{2} \geq \sqrt{b_1 b_2}$$

$$a_2 = \frac{b_3 + b_4}{2} \geq \sqrt{b_3 b_4}$$

$$a_3 = \frac{b_5 + b_6}{2} \geq \sqrt{b_5 b_6}$$

…

$$a_n = \frac{b_{2n-1} + b_{2n}}{2} \geq \sqrt{b_{2n-1} b_{2n}}$$

onde $a_i (i = 1, \dots, n)$ são números não negativos.

Fazendo a substituição temos

$$\frac{\frac{b_1+b_2}{2} + \frac{b_3+b_4}{2} + \cdots + \frac{b_{2n-1}+b_{2n}}{2}}{n} \geq \sqrt[n]{\sqrt{b_1 b_2}\sqrt{b_3 b_4} \dots \sqrt{b_{2n-1} b_{2n}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n}}{2n} \geq \sqrt[2n]{b_1 b_2 \dots b_{2n}}$$

E mostrámos que a desigualdade MA-MG é válida para 2n valores e pelo método de Indução verificámos ser válida para qualquer número da forma $n = 2^k$

Desigualdade MA-MG para n números

Uma das formas de mostrar esta desigualdade é continuando o processo anterior.

Já mostramos que a desigualdade se verifica para todos os valores da forma $n = 2^k$ Para mostrar que a desigualdade MA-MG se verifica para qualquer n, vamos utilizar um método que recorra ao que já foi mostrado.

Particularizando o n, vamos mostrar que sabendo que a desigualdade é válida para $n = 4$ chegamos à prova da desigualdade para $n = 3$.

Sabendo que $\frac{a_1+a_2+a_3+a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$

e $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$, $b_3 = a_3$ e a_4 obtido de modo a que:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \Leftrightarrow \frac{b_1 + b_2 + b_3 + a_4}{4} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_4 = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}$$

Substituindo em

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} = \frac{b_1 + b_2 + b_3}{3} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^4 \geq b_1 b_2 b_3 \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{b_1 + b_2 + b_3}{3}\right)^3 \geq b_1 b_2 b_3$$

$\Leftrightarrow \frac{b_1+b_2+b_3}{3} \geq \sqrt[3]{b_1 b_2 b_3}$

A igualdade verifica-se quando $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ ou seja para $b_1 = b_2 = b_3$.

Pelo mesmo método vamos provar que a desigualdade é válida para $n-1$ sabendo que é válida para n.

Sejam $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2$,…, $b_{n-1} = a_{n-1}$ e a_n obtido de modo a que:

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}}{n-1} \Leftrightarrow \quad a_n = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}}{n-1}$$

Do mesmo modo que anteriormente, verificamos que sabendo que a desigualdade é válida para n: $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}}{n-1}\right)^n \geq b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_{n-1}}{n-1}$$

$\Leftrightarrow \left(\frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1}\right)^{n-1} \geq b_1 b_2 \ldots b_{n-1} \Leftrightarrow \frac{b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}}{n-1} \geq \sqrt[n-1]{b_1 b_2 \ldots b_{n-1}}$

Dando-se a igualdade quando $b_1 = b_2 = \cdots = b_{n-1}$.

Mostramos que sabendo que a desigualdade é valida para n é válida para para $n-1$, fazendo que a desigualdade MA-MG seja válida para qualquer valor de n.

Um outro processo de mostrar a desigualdade MA-MG para n números é utilizando uma propriedade das funções convexas.

Um função diz-se convexa quando a recta que une dois quaisquer pontos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$, em que $[a, b]$ está contido no domínio da função, toma um valor superior à função entre os dois pontos .

Sendo f convexa e $x, y \in [a, b]$ temos a seguinte desigualdade:

$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big)$ ou de um modo mais geral, se considerarmos $x_1, x_2, \dots, x_n \in [a, b]$, temos $f\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big)$.

Considerando a função convexa $f(x) = e^x$ de domínio $\mathbb{R}$, temos que

$$e^{\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n})$$

$$\sqrt[n]{e^{x_1+x_2+\cdots+x_n}} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n})$$

$$\sqrt[n]{e^{x_1}e^{x_2}\dots e^{x_n}} \leq \frac{1}{n}(e^{x_1} + e^{x_2} + \cdots + e^{x_n})$$

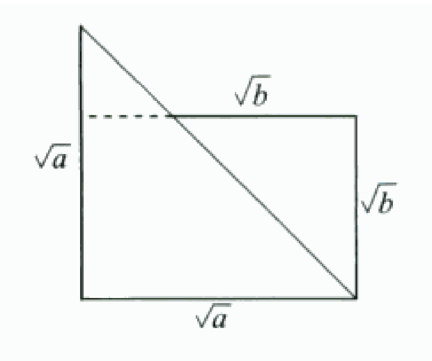
Fazendo a substituição e $x_i = \ln a_i \; com \; i = 1, \dots, n \in \mathbb{R}^+$ obtemos

$$\sqrt[n]{a_1.a_2\dots a_n} \leq \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$$

que é a conhecida desigualdade MA-MG para n números.

Exercícios propostos

1. Através dos triângulos retângulos apresentados abaixo, verifique a desigualdade MA-MG.



2. De todos os retângulos com a mesma medida de diagonal, determine qual o que tem maior perímetro e qual o que tem maior área.

3. Mostre que para $a, b, c \geq 0$, temos $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

Proposta de resolução

1. Por observação da figura a soma das áreas dos dois triângulos é maior que a área do retângulo. Isto é:

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\sqrt{b}\right)^2 \geq \sqrt{a}\,\sqrt{b} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{a+b}}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Verificando-se assim a desigualdade MA-MG.

2. Sejam $a, b, c \geq 0$, em que a, b são os comprimentos dos lados do rectângulo e c a medida da diagonal do retângulo. $c^2 = a^2 + b^2$

O perímetro do retângulo é

$P = 2(a+b) = 4\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 4\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = 4\sqrt{\frac{c^2}{2}} = 4\sqrt{\frac{1}{2}}c = 2\sqrt{2}c$,

aplicando a desigualdade entre as médias aritmética e quadrática.

Simplificando temos:

$$P = 4\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 2\sqrt{2}c$$

A área do retângulo é

$$A = ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{P^2}{16} \leq \frac{\left(2\sqrt{2}c\right)^2}{16} = \frac{c^2}{2}$$

Para a área e para o perímetro a igualdade verifica-se quando $a = b$.

Podemos então concluir que de todos os retângulos com medidas de lado a, b e com diagonal c o que tem maior perímetro é o quadrado de medida de lado $2\sqrt{2}c$ e o que tem maior área é o quadrado de medida de lado $\frac{c^2}{2}$.

3. Sabemos pela MA-MG:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, $\quad \frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$ e $\frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ca}$

Usando o principio de equivalência da multiplicação e sabendo que $a, b, c \geq 0$,

$$\frac{a+b}{2} \times \frac{b+c}{2} \times \frac{c+a}{2} \geq \sqrt{ab} \times \sqrt{bc} \times \sqrt{ca} \Leftrightarrow$$

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{8} \geq \sqrt{a^2b^2c^2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$$

Desigualdade com a média harmónica para dois valores

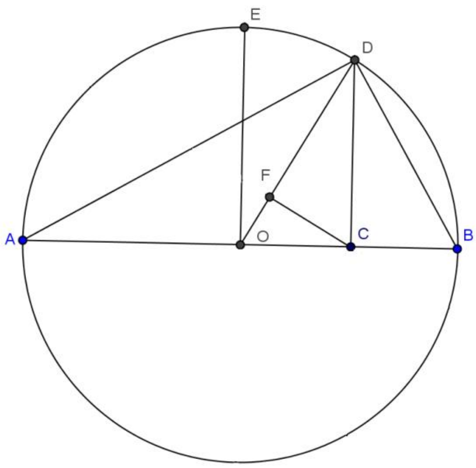
A média harmónica (MH) entre dois valores a e b, é o inverso da média aritmética dos inversos $\frac{1}{a}$ e $\frac{1}{b}$, isto é:

$$MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2\,a\,b}{a+b}.$$

A média harmónica é aconselhável em situações onde a proporcionalidade inversa esteja presente. É utilizada, por exemplo em problemas de velocidade média, se percorrermos 100Km a uma velocidade média de 80 Km/h e outros 100Km a uma velocidade média de 120 Km/h, a velocidade média é a média harmónica entre os números 80 e 120:

$$\frac{1}{\frac{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{80}+\frac{1}{120}} = 96$$

Ou seja a velocidade média do percurso de 200Km foi 96 Km/h.



Podemos ainda estabelecer uma relação entre média harmónica e as médias aritmética e geométrica, através da figura anterior, fazendo o cálculo da altura do triângulo [COD] relativamente à hipotenusa, obtendo assim o segmento de recta CF, que decompõe o triângulo nos triângulos [OCF] e [CDF].

Pela forma como foi decomposto o triângulo [COD] os triângulos [OCF] e [CDF] são semelhantes e verificam

$$\frac{\overline{OF}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CF}}{\overline{DF}} \Leftrightarrow \overline{CF}^2 = \overline{OF} \times \overline{DF} \ (2)$$

Sabendo que $\overline{OF} + \overline{DF} = \overline{OD}\,(3)$

e que os triângulos [ACD] e [BCD] são semelhantes verificando

$\frac{\overline{CD}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CD}} \Leftrightarrow \overline{CD}^2 = a \times b$ (4), aplicando o Teorema de Pitágoras verifica-se que ,

$$\overline{CF}^2 + \overline{DF}^2 = \overline{CD}^2 \underset{(2)}{\Leftrightarrow} \overline{OF} \times \overline{DF} + \overline{DF}^2 = \overline{CD}^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{DF}\,(\overline{OF} + \overline{DF}) = \overline{CD}^2 \underset{(3)}{\Leftrightarrow} \overline{DF} \times \overline{OD} = \overline{CD}^2 \Leftrightarrow \overline{DF} = \frac{\overline{CD}^2}{\overline{OD}} \underset{\substack{(1)\\(4)}}{\Leftrightarrow} \overline{DF} = \frac{ab}{\frac{a+b}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \overline{DF} = \frac{2ab}{a+b}$$

O segmento [DF] tem como comprimento a expressão analítica da média harmónica dos valores a e b.

Por observação da figura e pelo modo como esta foi construída podemos garantir que o segmento [DF] é sempre menor que o segmento [CD], que representa a média geométrica.

Assim podemos verificar que a média harmónica é menor que as médias geométrica e aritmética.

Usando a MA-MG,

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow ab \le \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4ab \le (a+b)^2 \underset{\times ab}{\Leftrightarrow} 4a^2b^2 \le ab(a+b)^2 \Leftrightarrow$$

$$\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \le ab \Leftrightarrow \sqrt{\frac{4a^2b^2}{(a+b)^2}} \le \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \le \sqrt{ab}$$

Desigualdade MA-MH para três valores

Para provarmos que esta relação se verifica para quaisquer 3 números, consideremos $x, y, z \ge 0$. Pretendemos mostrar que:

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

dando-se a igualdade quando $x = y = z$.

$$\frac{x+y+z}{3} \ge \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \ge 9$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1 + \frac{x}{y} + \frac{x}{z} + \frac{y}{x} + 1 + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + 1$$

$$= 3 + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{z}{y} + \frac{y}{z} \ge 9$$

pois cada par $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2$.

dando-se a igualdade quando $x = y = z$

Desigualdade MA-MH para n valores

Utilizaremos o método utilizado anteriormente, para mostrar que

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \Leftrightarrow$$

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$$

$$\forall\, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$$

Se multiplicarmos o primeiro membro da desigualdade vamos obter n vezes 1 e $\binom{n}{2}$ pares $\frac{x_i}{x_j} + \frac{x_j}{x_i} \geq 2$.

Podemos concluir que o primeiro membro é no mínimo $n + 2\binom{n}{2} = n^2$.

Exercício proposto

Verifique, para quaisquer números $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}$$

Proposta de resolução

Reescrevendo a desigualdade:

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}$$

Para mostrarmos que a desigualdade se verifica basta assim verificar que

$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x}$$

Vamos então usar a desigualdade MH-MA,

$$\frac{a+b}{2} > \frac{2ab}{a+b}$$

entre os valores $a = \frac{1}{x-1}$ e $b = \frac{1}{x+1}$

MA= $\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right)$

MH= $\frac{\frac{2}{x-1}\,\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{2}{(x-1)(x+1)}}{\frac{(x-1)+(x+1)}{(x-1)(x+1)}} = \frac{2}{2x} = \frac{1}{x}$

Verifica-se então pela relação de desigualdade MH-MA que

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right) > \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x}$$

Concluímos assim que:

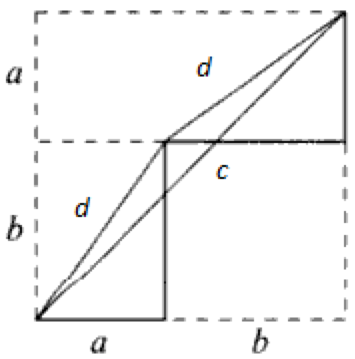
$$\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{2}{x} + \frac{1}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}$$

Desigualdade com a média quadrática para dois valores

A média quadrática (MQ) entre dois valores a e b, é a raiz quadrada da média aritmética dos quadrados de a e b e é dada pela expressão:

$$MQ = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

A média quadrática é utilizada em Física e Electrotecnia para medir, por exemplo, magnitudes de ondas.



Podemos verificar a relação de ordem existente entre a média aritmética e a média quadrática através de um quadrado de lado a + b, já utilizado em provas anteriores, mas agora decompondo de outra forma.

Pela forma como foi decomposto o quadrado podemos utilizar a desigualdade triangular entre os triângulos para estabelecer mais uma relação entre médias.

Como apenas queremos usar as medidas a e b, vamos determinar c e d em função de a e b, através do Teorema de Pitágoras.

c é a hipotenusa do triângulo rectângulo de catetos (a+b) e por isso:

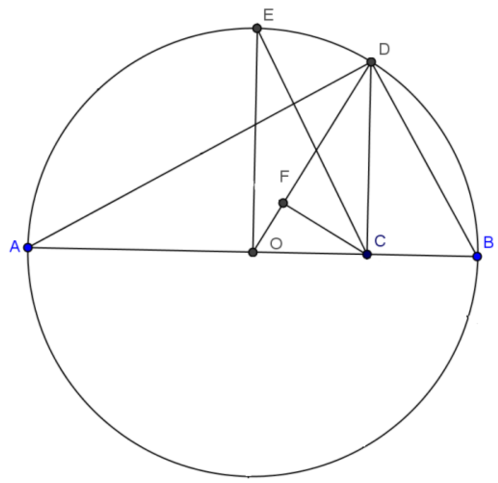
$$c = \sqrt{2(a+b)^2} = \sqrt{2}\sqrt{(a+b)^2} = \sqrt{2}\,(a+b)$$

Por outro lado d, é a hipotenusa dos triângulos de catetos a e b e assim:

$$d = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observando a figura, podemos verificar que pela desigualdade triangular, $c \leq d + d$, pois cada um dos lados tem de ser menor qua soma dos outros dois, que:

$$\sqrt{2}\,(a+b) \leq 2\sqrt{a^2 + b^2} \underset{\div\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\Longleftrightarrow} \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$



Através de uma figura utilizada anteriormente, construindo o segmento [CE], também podemos demonstrar a relação estabelecida entre as duas médias.

$$\overline{CE} = \sqrt{\overline{OE}^2 + \overline{OC}^2} = \sqrt{\overline{OE}^2 + \overline{OD}^2 - \overline{CD}^2} =$$

$$= \sqrt{2\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - ab} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

$\overline{OE} = \frac{a+b}{2}$ como vimos anteriormente.

Por construção podemos afirmar que $\overline{OE} \leq \overline{CE}$.

Sendo assim, também se prova através desta figura que

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$$

Desigualdade MQ-MA para n números

Considerando a função convexa $f(x) = x^2$ de domínio $\mathbb{R}$ e $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$,

temos que $\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n} \Leftrightarrow \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}}$

que é a desigualdade de MQ-MA para n números.

Exemplo de aplicação

Sendo a, b, c as medidas dos lados de um triângulo, mostre que se verifica:

$$\sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Proposta de resolução

Sendo a, b e c as medidas dos lados de um triângulo podemos garantir que

$a, b, c \geq 0$, $a + b > c \Leftrightarrow a + b - c > 0$, $b + c > a \Leftrightarrow b + c - a > 0$ e $c + a > b \Leftrightarrow c + a - b > 0$ pela desigualdade triangular.

Sejam $a = y + z$, $b = z + x$ e $c = x + y$, podemos verificar que

$$a + b - c = 2z,\ \ b + c - a = 2x \ \text{ e } \ c + a - b = 2y.$$

E por isso, pretendemos mostrar que :

$\sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z}$.

Aplicando a desigualdade entre a média aritmética- média quadrática:

$$\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{2y}}{2} + \frac{\sqrt{2y}+\sqrt{2z}}{2} + \frac{\sqrt{2z}+\sqrt{2x}}{2} \leq \sqrt{\frac{2x+2y}{2}} + \sqrt{\frac{2y+2z}{2}} + \sqrt{\frac{2z+2x}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x} + \sqrt{2y} + \sqrt{2z} \leq \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{x+z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a+b-c} + \sqrt{b+c-a} + \sqrt{c+a-b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$$

Podemos concluir que, sempre que tenhamos dois valores $a, b \geq 0$:

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+\ b^2}{2}}$$

Ou seja: $MH \leq MG \leq MA \leq MQ$.

O caso de igualdade verifica-se quando $a = b$.

Todos os desenvolvimentos anteriores contribuem para responder ao problema proposto nas Olimpíadas da matemática Portuguesas (Final nacional 1984/1985):

“A média aritmética de dois números x e y é, como se sabe, $\frac{x+y}{2}$. A média geométricade x e y é $\sqrt{xy}$. A média harmónica de x e y é $\frac{2xy}{x+y}$. Tenta descobrir e demonstrar de que maneira podem-se relacionar estas três médias entre si, usando o símbolo ≤.”

Para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}}$$

Ou seja: $MH \leq MG \leq MA \leq MQ$.

O caso de igualdade verifica-se quando$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Estratégias úteis para utilizar nas desigualdades

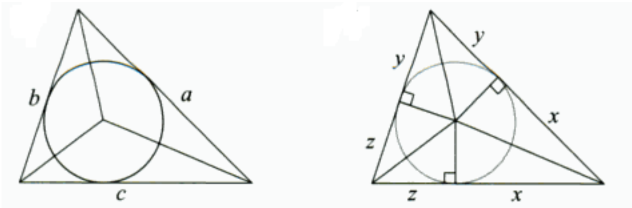
Uma das estratégias é procurar semelhanças com a desigualdade que se pretende mostrar e com algumas das desigualdades apresentadas anteriormente (MQ-MA-MG-MH ou Desigualdade de Cauchy-Schwarz).

Outra das estratégias para deduzir as desigualdades é fazer substituição de variáveis.

A transformação de Ravi é uma das substituições possíveis. Esta substituição pode ser utilizada com desigualdades em que se considere a, b, c números reais positivos.

Para a substituição consideramos x, y, z números reais positivos tais que $x = a + b$, $y = b + c$ e $z = a + c$. A substituição inversa é $a = \frac{x+z-y}{2}$, $b = \frac{x+y-z}{2}$ e $c = \frac{y+z-x}{2}$.

Se a, b, c são medidas dos lados de um triângulo. Se nesse triângulo inscrevermos um círculo através do seu incentro, unindo os vértices e os pontos de tangência com o circuncentro, resultam três pares de triângulos retângulos que garantem esta substituição, como se pode ver nas figuras.



Exemplos de aplicação

Se a, b, c são medidas dos lados de um triângulo, então:

$$abc \geq (a+b-c)+(b+c-a)+(a+c-b)$$

Usando a substituição de Ravi, esta desigualdade é equivalente a

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$$

Aplicando três vezes a desigualdade MA-MG, sai este resultado.

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{y+z}{2}\right)\left(\frac{z+x}{2}\right) \geq \sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}$$

A desigualdade

$$abc \geq (a+b-c)+(b+c-a)+(a+c-b)$$

Foi apresentada em 1925 por Alessandro Padoa (1868-1937), matemático italiano tem o nome de Desigualdade de Padoa, também útil na dedução de outras desigualdades.

Nas olimpíadas internacionais de matemática de 2002, foi proposto por Titu Andreescu, professor de matemática da universidade do Texas, o seguinte problema:

"Sejam a, b, c números positivos tais que $abc = 1$. Mostre que:

$\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right) \leq 1$."

Sabendo que $abc = 1$ podemos fazer a seguinte substituição:

$a = \frac{x}{y}$, $b = \frac{y}{z}$ e $c = \frac{z}{x}$, com $xyz > 0$

$$\left(\frac{x}{y}-1+\frac{z}{y}\right)\left(\frac{y}{z}-1+\frac{x}{z}\right)\left(\frac{z}{x}-1+\frac{y}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow xyz \geq (x+y-z)+(y+z-x)+(x+z-y)$$

esta última desigualdade foi referida em cima, como desigualdade de Padoa, tornando verdadeira a desigualdade que queríamos mostrar.

Outros tipos de substituições podem contribuir para a simplificação das desigualdades.

Desigualdades úteis para utilizar nas competições

Se a, b, x, y são números reais e $x, y > 0$

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Simplificando a desigualdade vemos que é válida.

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \Leftrightarrow a^2y\,(x+y) + b^2x(x+y) \geq (a+b)^2xy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2xy + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2xy \geq a^2xy + b^2xy + 2abxy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ay - bx) \geq 0$$

A igualdade surge quando $ay = bx$.

Aplicando a desigualdade duas vezes, podemos estender esta desigualdade para três pares de números reais a, b, c, x, y, z com $x, y, z > 0$.

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

A igualdade surge quando $ay = bx = cz$.

Por indução conseguimos validar esta desigualdade para n pares de números reais, $a_1, a_2, \ldots, a_n, x_1, x_2, \ldots, x_n$ com $x_1, \ldots, x_n > 0$.

$$\frac{{a_1}^2}{x_1} + \frac{{a_2}^2}{x_2} + \cdots + \frac{{a_n}^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

Dando-se a igualdade quando $a_1x_1 = a_2x_2 = \cdots = a_nx_n$.

Exemplos de aplicação

Com a desigualdade podemos resolver um problema proposto nas IMO de 1995.

"Sejam $a, b, c > 0$ tal que $abc = 1$ mostre que :$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{b^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$."

Começamos por reescrever o primeiro membro da desigualdade.

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{b^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^2}}{a(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^2}}{b(a+c)} + \frac{\frac{1}{c^2}}{c(a+b)} \geq$$

$$\geq \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)} = \frac{\left(\frac{bc+ac+ab}{abc}\right)^2}{2(ab+\mathrm{bc}+ca)} = \frac{ab+bc+ca}{2(abc)^2} = \frac{ab+\mathrm{bc}+ca}{2}$$

$$\geq \frac{3\sqrt[3]{abbcca}}{2} = \frac{3\sqrt[3]{(abc)^2}}{2} = \frac{3}{2}$$

Um outro de exemplo de aplicação, é o seguinte:

Sejam x, y, z números reais positivos . Mostre que:

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

Para mostrarmos esta desigualdade basta reescrevermos o primeiro membro da desigualdade e aplicar a desigualdade anterior.

$$\frac{(\sqrt{2})^2}{x+y} + \frac{(\sqrt{2})^2}{y+z} + \frac{(\sqrt{2})^2}{z+x} \geq \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2})^2}{x+y+y+z+z+x} = \frac{(3\sqrt{2})^2}{x+y+y+z+z+x} = \frac{9}{x+y+z}$$

Método da reordenação

A soma $S = a_1\, b_1 + \ a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n$ é máxima, se as duas sequências $a_1, a_2, \ldots, a_n$e $b_1, b_2, \ldots, b_n$ forem ordenadas da mesma forma.

Isto é, considerando $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$,temos por exemplo,

$a_1\, b_1 + \ a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n \geq a_1\, b_n + \ a_2\, b_1 + \cdots + a_n\, b_2$.

S é mínima, se as sequências forem ordenadas de forma oposta, uma de forma crescente e outra de forma decrescente.

Isto é, considerando $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, temos por exemplo,

$a_1\, b_1 + \; a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n \leq a_1\, b_n + \; a_2\, b_1 + \cdots + a_n\, b_2,$

Para verificarmos a veracidade do método vamos considerar $a_r > a_s$ e as somas

$$S = a_1\, c_1 + \;\ldots + a_r\, c_r + \cdots + a_s\, c_s + \cdots + a_n\, c_n$$

$$S' = a_1\, c_1 + \;\ldots + a_r\, c_s + \cdots + a_s\, c_r + \cdots + a_n\, c_n$$

$$S' - S = \; a_r\, c_s + a_s\, c_r - a_r\, c_r - a_s\, c_s = (a_r - a_s)(c_s - c_r)$$

Assim se $c_r > c_s \Rightarrow S' < S$ e $c_r < c_s \Rightarrow S' > S$.

Pode-se utilizar este método para provar a desigualdade MA-MG para n valores, supondo que $x_i > 0$, $c = \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n}$,

$a_1 = \frac{x_1}{c}$, $a_2 = \frac{x_1 x_2}{c^2}, a_3 = \frac{x_1 x_2 x_3}{c^3}, \ldots, a_n = \frac{x_1 x_2 \ldots x_n}{c^n} = 1$, $b_1 = \frac{1}{a_1}$, $b_2 = \frac{1}{a_2}, \ldots, b_n = \frac{1}{a_n} = 1$.

As sequências a_i e b_i estão ordenadas de forma oposta, pelo método do reordenamento, $a_1\, b_1 + a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n \leq a_1\, b_n + a_2\, b_1 + \cdots + a_n\, b_{n-1}$

$$1 + 1 + \cdots + 1 \leq \frac{x_1}{c} + \frac{x_2}{c} + \cdots + \frac{x_n}{c}$$

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

Exemplos de aplicação

Sejam $a, b, c > 0$. Mostre que:

1. $a^3 + \; b^3 + c^3 \geq a^2 b + \; b^2 c + c^2 a$
2. $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$
3. $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} \geq \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c}$
4. Problema das IMO de 1978

"Considere duas sequências de números x_i , y_i com $i = 1, \dots, n$, tais que $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$ e $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n$. Seja $(z_1, z_2, \dots, z_n)$ uma permutação de $(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Mostre que: $(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2 \leq (x_1 - z_1)^2 + \dots + (x_n - z_n)^2$."

5. Problema das IMO de 1964

"Suponha que a, b, c são as medidas de lados de um triângulo. Mostre que:

$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$."

6. Problema das IMO de 1978

"Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números inteiros distintos.

Mostre que: $\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \dots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$."

Proposta de resolução

1. $a^3 + b^3 + c^3 = a^2a + b^2b + c^2c \geq a^2b + b^2c + c^2a$

Porque pelo método de reordenamento, as sequências do primeiro membro estão ordenadas da mesma forma e por isso a sua soma é máxima.

2. Vamos reescrever a desigualdade da seguinte forma:

$$\frac{a}{abc} + \frac{b}{abc} + \frac{c}{abc} = \frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{a}.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.\frac{1}{a}$$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{a}.\frac{1}{a} + \frac{1.}{b}.\frac{1}{b} + \frac{1}{c}.\frac{1}{c}$$

$$\frac{1}{a}.\frac{1}{b} + \frac{1}{b}.\frac{1}{c} + \frac{1}{c}.\frac{1}{a} \leq \frac{1}{a}.\frac{1}{a} + \frac{1.}{b}.\frac{1}{b} + \frac{1}{c}.\frac{1}{c}$$

No segundo membro da desigualdade temos duas sequências ordenadas na mesma forma, no primeiro membro foi feita uma reordenação da segunda sequência. Pelo Método da reordenação, esta soma é mínima.

3. Vamos reescrever a desigualdade da seguinte forma:

$$\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{c^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{a}{b}.\frac{a}{b} + \frac{b}{c}.\frac{b}{c} + \frac{c}{a}.\frac{c}{a}$$

$$\frac{b}{a} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} = \frac{b}{c}.\frac{c}{a} + \frac{c}{a}.\frac{a}{b} + \frac{a}{b}.\frac{b}{c}$$

$$\frac{a}{b}.\frac{a}{b}+\frac{b}{c}.\frac{b}{c}+\frac{c}{a}.\frac{c}{a}\geq\frac{b}{c}.\frac{c}{a}+\frac{c}{a}.\frac{a}{b}+\frac{a}{b}.\frac{b}{c}$$

Pelo método de reordenação, as duas sequências do primeiro membro estão ordenadas da mesma forma, a soma é máxima, verificando-se a desigualdade pretendida.

4. $(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2\leq(x_1-z_1)^2+\cdots+(x_n-z_n)^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i+\sum_{i=1}^{n}{y_i}^2\leq\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2-2\sum_{i=1}^{n}x_i\,z_i+\sum_{i=1}^{n}{z_i}^2$$

$$\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{n}x_i\,z_i\leq\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$$

Uma vez que $\sum_{i=1}^{n}{x_i}^2=\sum_{i=1}^{n}{z_i}^2$, esta uma desigualdade verifica-se pelo método da reordenação uma vez que as sequências x_i , y_i com $i=1,\ldots,n$, estão ordenadas do mesmo modo, fazendo com a soma $\sum_{i=1}^{n}x_i\,y_i$ seja máxima.

5. Podemos admitir sem perda de generalidade que $c\leq b\leq a$

Verifiquemos que:

$$a(b+c-a)\leq b(a+c-b)\Leftrightarrow ab+ac-a^2\leq ab+bc-b^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ac-bc\leq a^2-b^2\Leftrightarrow(a-b)c\leq(a+b)(a-b)\Leftrightarrow(a+b)(a-b)-(a-b)c\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(a-b)(a+b-c)\geq 0$$

Verifica-se a desigualdade $a(b+c-a)\leq b(a+c-b)$, por se ter suposto que $a\geq b$ e pela desigualdade triangular, $a+b-c>0$.

$$b(a+c-b)\leq c(a+b-c)\Leftrightarrow ab+bc-b^2\leq ac+bc-c^2\Leftrightarrow ab-ac\leq b^2-c^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a(b-c)\leq(b-c)(b+c)\Leftrightarrow(b-c)(b+c)-a(b-c)\geq 0\Leftrightarrow(b-c)(b+c-a)\geq 0$$

Verifica-se a desigualdade $b(a+c-b)\leq c(a+b-c)$, por se ter suposto que $b\geq c$ e pela desigualdade triangular, $b+c-a>0$.

Tem-se assim que:

$a(b+c-a)\leq b(a+c-b)\leq c(a+b-c)$ e $c\leq b\leq a$.

Pelo método da reordenação,

por um lado:

$$aa(b+c-a)+bb(a+c-b)+cc(a+b-c)$$
$$\leq ba(b+c-a)+cb(a+c-b)+ac(a+b-c)$$

$$\Leftrightarrow a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)$$
$$\leq ba(b+c-a)+cb(a+c-b)+ac(a+b-c)$$

por outro:

$aa(b+c-a)+bb(a+c-b)+cc(a+b-c)$
$\leq ca(b+c-a)+ab(a+c-b)+bc(a+b-c) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c) \leq ca(b+c-a)+ab(a+c-b)+bc(a+b-c)$

Assim somando as duas desigualdades e simplificando os termos semelhantes, obtemos:

$$2[a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c)] \leq 6abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(b+c-a)+b^2(a+c-b)+c^2(a+b-c) \leq 3abc$$

Como se pretendia mostrar.

6. Seja $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma permutação de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Com $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e consideremos $(b_1, b_2, \dots, b_n) = \left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n-1)^2}, \dots, \frac{1}{1^2}\right)$ ou seja $b_i = \frac{1}{(n+1-i)^2}$ com $i = 1, \dots, n$.

Consideremos $(a'_1, a'_2, \dots, a'_n)$ uma permutação de $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ com $a'_i = x_{n+1-i}$ com $i = 1, \dots, n$.

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2}=\frac{x_n}{n^2}+\frac{x_{n-1}}{(n-1)^2}+\cdots+\frac{x_1}{1^2}=a'_1b_1+a'_2b_2+\cdots+a'_nb_n \geq$$

$$\geq a_nb_1+a_{n-1}b_2+\cdots+a_1b_n=a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1=\frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2}$$

Uma vez que $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ uma permutação de $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, uma sequência de números inteiros positivos, considerando $1 \leq a_1, 2 \leq a_2, \dots, n \leq a_n$.

$$\frac{x_1}{1^2}+\frac{x_2}{2^2}+\cdots+\frac{x_n}{n^2} \geq \frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2} \geq \frac{1}{1^2}+\frac{2}{2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$$

Desigualdade de Nesbitt

Sendo $a, b, c \geq 0$, verifica-se:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Uma das formas de mostrar esta desigualdade é através do método da reordenação.

Sem perda de generalidade podemos assumir que $a \leq b \leq c$ e daí podemos assumir que $a + b \leq c + a \leq b + c$ e $\frac{1}{b+c} \leq \frac{1}{c+a} \leq \frac{1}{a+b}$.

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{b}{b+c} + \frac{c}{a+c} + \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{b+c} + \frac{a}{a+c} + \frac{b}{a+b}$$

Portanto, somando as duas desigualdades anteriores:

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \geq \frac{b+c}{b+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{a+b}{a+b}$$

Obtemos assim a desigualdade de Nesbitt :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Um outro modo de mostrar a desigualdade é reescrevendo o primeiro da desigualdade e fazendo mudanças de variável.

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} &== \frac{a}{b+c} + \frac{b+c}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{c}{a+b} + \frac{a+b}{a+b} - 3 \\ &= \frac{a+b+c}{b+c} + \frac{a+b+c}{a+c} + \frac{a+b+c}{a+b} - 3 \\ &= (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3 \\ &= \frac{1}{2}[(a+b) + (b+c) + (a+c)]\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) - 3\end{aligned}$$

Consideremos $x = a + b$, $y = b + c$ e $z = a + c$ e fazendo a substituição na expressão anterior, obtemos:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = \frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) - 3$$

$$\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1\right)-3=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}$$

Como pela desigualdade de Cauchy se verifica:

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$$

$$\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2$$

$$\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\geq 2$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)-\frac{3}{2}\geq\frac{3}{2}$$

A igualdade dá-se para $x=y=z$, ou seja, $a=b=c$.

Uma outra forma de mostrar a Desigualdade de Nesbitt é usando as substituições de variáveis anteriores e a desigualdade MA-MH, para 3 números:

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$$

$$\frac{x+y+z}{3}\geq\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}\Leftrightarrow(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}=\frac{1}{2}(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)-3\geq\frac{1}{2}.9-3=\frac{3}{2}$$

E assim se mostrou que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}$$

Exemplo de aplicação

Problema das IMO de 1995

"Sejam a, b, c números reais positivos com $abc = 1$. Mostre que:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}."$$

Sem perda de generalidade podemos assumir que $c \leq b \leq a$.

Sejam $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$ e $z = \frac{1}{c}$, assim temos:

$$S = \frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} = \frac{\frac{1}{a^3}}{(b+c)} + \frac{\frac{1}{b^3}}{(c+a)} + \frac{\frac{1}{c^3}}{(a+b)}$$
$$= \frac{x^3}{\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)} + \frac{y^3}{\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)} + \frac{z^3}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)} = \frac{x^3}{\frac{y+z}{yz}} + \frac{y^3}{\frac{z+x}{zx}} + \frac{z^3}{\frac{x+y}{xy}}$$
$$= \frac{x^3}{x(y+z)} + \frac{y^3}{y(z+x)} + \frac{z^3}{z(x+y)} = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y}$$

Como $x = \frac{1}{a}, y = \frac{1}{b}$, $z = \frac{1}{c}$ e $abc = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{bc} \Leftrightarrow b = \frac{1}{ac} \Leftrightarrow c = \frac{1}{ab}$, $yz = \frac{1}{bc} = \frac{1}{x}$, $zx = \frac{1}{ac} = \frac{1}{y}$ e $xy = \frac{1}{ab} = \frac{1}{z}$.

Sabendo que $c \leq b \leq a \Leftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{c} \Leftrightarrow x \leq y \leq z$ e podemos deduzir que $x + y \leq x + z \leq y + z$ e também que $\frac{x}{y+z} \leq \frac{y}{z+x} \leq \frac{z}{x+y}$.

Utilizando o método de reordenação duas vezes e somando, podemos verificar que :

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = \frac{xx}{y+z} + \frac{yy}{z+x} + \frac{zz}{x+y} \geq \frac{xz}{y+z} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y}$$

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} = \frac{xx}{y+z} + \frac{yy}{z+x} + \frac{zz}{x+y} \geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y}$$

$$2S \geq \frac{xy}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{zx}{x+y} + \frac{xz}{y+z} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zy}{x+y}$$
$$= \frac{xy}{y+z} + \frac{xz}{y+z} + \frac{yz}{z+x} + \frac{yx}{z+x} + \frac{zx}{x+y} + \frac{zy}{x+y}$$
$$= \frac{x(y+z)}{y+z} + \frac{y(z+x)}{z+x} + \frac{z(x+y)}{x+y} = x + y + z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$$

Portanto, $S \geq \frac{2}{3}$.

Competições de Matemática internacionais

Foram recolhidos alguns problemas com desigualdades, apresentados em competições nacionais, regionais e internacionais de matemática, que se ajustassem aos desenvolvimentos feitos anteriormente, com graus diferentes de dificuldade.

Problemas com desigualdades apresentados em competições de matemática

1. (BIELORÚSSIA, 1999) " Sejam a, b, c números reais positivos tais que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Mostre que $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geq \frac{3}{2}$."

Proposta de resolução:

Consideremos a função $f(x) = \frac{1}{1+x}$, convexa para $x > 0$. Assim

$$\frac{f(ab)+f(bc)+f(ca)}{3} \geq f\left(\frac{ab+bc+ca}{3}\right) = \frac{3}{3+ab+bc+ca} \geq \frac{3}{3+a^2+b^2+c^2} = \frac{1}{2}$$

Uma vez que já se provou pela desigualdade de Cauchy que

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq ab + bc + ca.$$

2. (Balkan Mathematical Olympiad, Reino Unido,2001) "Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc \leq a + b + c$. Mostre que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$."

Proposta de resolução:

$$abc \leq a + b + c \Leftrightarrow (abc)^2 \leq (a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

Pois pela desigualdade útil podemos garantir que $\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} \geq \frac{(a+b+c)^2}{1+1+1}$

Sabemos então que $3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (abc)^2 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2) \geq \frac{(abc)^2}{3}$

Por outro lado pela desigualdade MA-MG, $\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \sqrt[3]{(abc)^2} \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq \left(3\sqrt[3]{(abc)^2}\right)^3 \Leftrightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^3 \geq 3^3(abc)^2$

Fazendo o produto $(a^2+b^2+c^2)^3(a^2+b^2+c^2) \geq \frac{(abc)^2}{3}3^3(abc)^2 = 3^2(abc)^4$ $\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)^4 \geq 3^2(abc)^4 \Leftrightarrow \sqrt[4]{(a^2+b^2+c^2)^4} \geq \sqrt[4]{3^2(abc)^4} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a^2+b^2+c^2 \geq \sqrt{3}abc$$

Como queríamos mostrar.

3. (Brasil, 2001) "Mostre que $(a+b)+(a+c) \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$, para todos a,b,c números reais positivos ."

Proposta de resolução:

Vamos reescrever a desigualdade e utilizar a desigualdade MA-MG.

$$(a+b)+(a+c) = a^2+ac+ab+bc = a(a+b+c)+bc \geq 2\sqrt{abc(a+b+c)}$$

A desigualdade dá-se aplicando a desigualdade MA-MG, uma vez que

$$\frac{a(a+b+c)+bc}{2} \geq \sqrt{abc(a+b+c)}$$

4. (Olimpíada Matemática Rioplatense, Argentina, 2002) "sejam a,b,c números reais positivos. Mostre que $\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right) \geq 1$."

Proposta de resolução:

Vamos reescrever a desigualdade e aplicar a desigualdade MA-MG.

$$\left(\frac{a}{b+c}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b}+\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{2a+b+c}{2\,(b+c)}\right)\left(\frac{2b+c+a}{2\,(c+a)}\right)\left(\frac{2c+a+b}{2\,(a+b)}\right) \geq 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b) \geq 8\,(b+c)(c+a)(a+b)$$

Esta última desigualdade verifica-se pois:

$$2a+b+c = (a+b)+(c+a) \geq 2\sqrt{(a+b)(c+a)}$$

$$2b+c+a = (b+c)+(a+b) \geq 2\sqrt{(b+c)(a+b)}$$

$$2c+a+b = (c+a)+(a+b) \geq 2\sqrt{(c+a)(a+b)}$$

Assim

$$
\begin{aligned}
&(2a+b+c)(2b+c+a)(2c+a+b)\\
&\qquad \geq 8\sqrt{(a+b)(c+a)}\sqrt{(b+c)(a+b)}\sqrt{(c+a)(a+b)}\\
&\qquad = 8\,(b+c)(c+a)(a+b)
\end{aligned}
$$

5. (Olimpíada Matemática Rioplatense, Argentina, 2002) "sejam a, b, c números reais positivos. Mostre que

$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$."

Proposta de resolução:

Vamos reescrever a desigualdade e aplicar a desigualdade MA-MG.

$$\frac{a+b}{c^2}+\frac{b+c}{a^2}+\frac{c+a}{b^2} \geq \frac{9}{a+b+c}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{c^2}-\frac{1}{c}+\frac{b+c}{a^2}-\frac{1}{a}+\frac{c+a}{b^2}-\frac{1}{b} \geq \frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a+b-c}{c^2}+\frac{b+c-a}{a^2}+\frac{c+a-b}{b^2} \geq \frac{9}{a+b+c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b-c)(a+b+c)}{c^2}+\frac{(b+c-a)(a+b+c)}{a^2}+\frac{(c+a-b)(a+b+c)}{b^2} \geq 9$$

Os numeradores de cada uma das frações são diferenças de quadrados e podem ser reescritos:

$$(a+b-c)(a+b+c)=(a+b)^2-c^2$$

$$(b+c-a)(a+b+c)=(b+c-a)(b+c+a)=(b+c)^2-a^2$$

$$(c+a-b)(a+b+c)=(c+a-b)(c+a+b)=(c+a)^2-b^2$$

$$\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{c^2}+\frac{(b+c-a)(a+b+c)}{a^2}+\frac{(c+a-b)(a+b+c)}{b^2} \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2-c^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2-a^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2-b^2}{b^2} \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{c^2}-\frac{c^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2}-\frac{a^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2}-\frac{b^2}{b^2} \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2}{c^2}+\frac{(b+c)^2}{a^2}+\frac{(c+a)^2}{b^2} \geq 12$$

Da desigualdade MA-MG sabemos que

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab$$

Assim, aplicando novamente a desigualdade MA-MG:

$$\frac{(a+b)^2}{c^2} + \frac{(b+c)^2}{a^2} + \frac{(c+a)^2}{b^2} \geq \frac{4ab}{c^2} + \frac{4bc}{a^2} + \frac{4ca}{b^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{4ab}{c^2}\frac{4bc}{a^2}\frac{4ca}{b^2}} = 12\sqrt[3]{\frac{a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2}} = 12$$

Como queríamos mostrar.

6. (Ucrânia, 2004)" Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc \geq 1$. Mostre que $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca$."

Proposta de resolução:

Vamos aplicar o método de reordenação mais de que uma vez e verifica-se que :

$$a^2a + b^2b + c^2c = a^2a + b^2b + c^2c$$

$$a^2a + b^2b + c^2c \geq a^2b + b^2c + c^2a$$

$$a^2a + b^2b + c^2c \geq a^2c + b^2a + c^2b$$

Somando os membros das três desigualdade podemos afirmar que:

$$3(a^3 + b^3 + c^3) \geq (a^2 + b^2 + c^2)(a + b + c) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 \geq (a^2 + b^2 + c^2)\frac{(a+b+c)}{3} \geq (ab + bc + ca)\sqrt[3]{abc} \geq ab + bc + ca$$

Pois sabemos que $abc \geq 1$ e pela desigualdade de Cauchy-Schwarz verifica-se

$$(ab + bc + ca)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + a^2) = (a^2 + b^2 + c^2)(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + ca) \leq (a^2 + b^2 + c^2)$$

Pela desigualdade MA-MG, verifica-se $\frac{(a+b+c)}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$ e assim mostrámos que

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca.$$

7. (China, 2007)" Se a, b, c são medidas dos lados de um triângulo com $a + b + c = 3$, encontre o mínimo de $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4\,abc}{3}$."

Proposta de resolução:

Fazendo substituição de variável, em que vamos considerar

$a = y + z, b = z + x, c = x + y$

$$3 = a + b + c = 2x + 2y + 2z \Leftrightarrow x + y + z = \frac{3}{2}$$

Usando a desigualdade MA-MG verifica-se que $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3 = \left(\frac{\frac{3}{2}}{3}\right)^3 = \frac{1}{8}$

$$a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4\,abc}{3} = \frac{3(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc}{3} = \frac{(a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc}{3}$$
$$= \frac{2(x + y + z)[(y + z)^2 + (z + x)^2 + (x + y)^2] + 4(y + z)(z + x)(x + y)}{3}$$

Depois de efectuarmos todas as simplificações possíveis no numerador desta fracção podemos concluir que $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4\,abc}{3} \geq \frac{4}{3}((x + y + z)^3 - xyz) = \frac{4}{3}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \frac{1}{8}\right) = \frac{13}{3}$

Portanto o menor valor que $a^2 + b^2 + c^2 + \frac{4\,abc}{3}$ toma é $\frac{13}{3}$.

8. (Grécia, 2007) "Se a, b, c são medidas dos lados de um triângulo, mostre que $\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} + \frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} \geq ab + bc + ca$."

Proposta de resolução:

Fazendo substituição de variável, em que vamos considerar

$a = y + z, b = z + x, c = x + y$

Podemos reescrever a desigualdade

$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} + \frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} \geq ab + bc + ca \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{(2z)^4}{(z + x)(2x)} + \frac{(2x)^4}{(x + y)(2y)} + \frac{(2y)^4}{(y + z)(2z)} \geq (y + z)(z + x) + (z + x)(x + y) + (x + y)(y + z)$$

Esta última desigualdade é o que pretendemos provar.

Comecemos por simplificar o primeiro membro da desigualdade.

$$\frac{(2z)^4}{(z+x)(2x)}+\frac{(2x)^4}{(x+y)(2y)}+\frac{(2y)^4}{(y+z)(2z)}=\frac{((2z)^2)^2}{(z+x)(2x)}+\frac{((2x)^2)^2}{(x+y)(2y)}+\frac{((2y)^2)^2}{(y+z)(2z)}\geq$$

$$\geq\frac{((2z)^2+(2x)^2+(2y)^2)^2}{(z+x)(2x)+(x+y)(2y)+(y+z)(2z)}=\frac{16\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{2(x^2+y^2+z^2+xy+yz+xz)}$$

$$\geq\frac{8\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}{2(x^2+y^2+z^2)}=4(x^2+y^2+z^2)$$

Simplificando o segundo membro da desigualdade :

$$(y+z)(z+x)+(z+x)(x+y)+(x+y)(y+z)=3(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)$$

Verificamos que será suficiente mostrar que $4(x^2+y^2+z^2)\geq 3(xy+yz+zx)+(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow(x^2+y^2+z^2)\geq(xy+yz+zx)$, esta desigualdade já foi demonstrada anteriormente, por isso podemos concluir que

$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)}+\frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)}+\frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)}\geq ab+bc+ca.$

9. (Canadá, 2008) "Sejam a,b,c números reais positivos tais que $a+b+c=1$. Mostre que $\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}$."

Proposta de resolução:

$$a+b+c=1\Leftrightarrow a=1-b-c\Leftrightarrow b=1-a-c\Leftrightarrow c=1-a-b$$

$$1-\frac{a-bc}{a+bc}=\frac{a+bc-a+bc}{a+bc}=\frac{2bc}{1-b-c+bc}=\frac{2bc}{(1-b)(1-c)}=\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}$$

$$1-\frac{b-ca}{b+ca}=\frac{b+ca-b+ca}{b+ca}=\frac{2ca}{1-c-a+ca}=\frac{2ca}{(1-c)(1-a)}=\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}$$

$$1-\frac{c-ab}{c+ab}=\frac{c+ab-c+ab}{c+ab}=\frac{2ab}{1-a-b+ab}=\frac{2ab}{(1-a)(1-b)}=\frac{2ab}{(b+c)(c+a)}$$

$$\frac{a-bc}{a+bc}+\frac{b-ca}{b+ca}+\frac{c-ab}{c+ab}\leq\frac{3}{2}\Leftrightarrow-\frac{a-bc}{a+bc}-\frac{b-ca}{b+ca}-\frac{c-ab}{c+ab}\geq-\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-\frac{a-bc}{a+bc}+1-\frac{b-ca}{b+ca}+1-\frac{c-ab}{c+ab}\geq 3-\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{2bc}{(c+a)(a+b)}+\frac{2ca}{(a+b)(b+c)}+\frac{2ab}{(b+c)(c+a)}\geq\frac{3}{2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4bc(b+c)+4ca(c+a)+4ab(a+b)\geq 3\,(a+b)(b+c)(c+a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\ [\ bc(1-a) + ca(1-b) + ab(1-c)] \geq\ 3\ (1-c)(1-a)(1-b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\ (bc - abc + ca - abc + ab - abc) \geq\ 3\ (1 - c - a + ca)(1-b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\ (bc + ca + ab - 3abc) \geq\ 3\ (1 - b - a + ab - c + bc + ca - abc) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\ bc + 4ca + 4ab - 12abc \geq\ 3\ (1 - (a + b + c) + ab + bc + ca - abc) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\ bc + 4ca + 4ab - 12abc \geq\ 3 - 3 + 3ab + 3bc + 3ca - 3abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow bc + ca + ab \geq\ 9abc$$

Pela desigualdade MA-MH sabemos que

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \Leftrightarrow (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 + \frac{a+c}{b} + \frac{a+b}{c} + \frac{b+c}{a} \geq 9$$

$$\Leftrightarrow 3abc + \ ac(1-b) + ab(1-c) + bc(1-a) \geq 9abc \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ac + ab + bc \geq\ 9abc$$

que era o que pretendíamos mostrar.

E assim $\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$.

10. (Irlanda, 2008) " Se os números reais positivos a, b, c, d satisfazem $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, mostre que

$a^2b^2cd + ab^2c^2d + abc^2d^2 + a^2bcd^2 + a^2bc^2d + ab^2cd^2 \leq \frac{3}{32}$. "

Proposta de resolução:

$$a^2b^2cd + ab^2c^2d + abc^2d^2 + a^2bcd^2 + a^2bc^2d + ab^2cd^2 \leq \frac{3}{32} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (ab + bc + cd + ad + ac + bd)abcd \leq \frac{3}{32}$$

Pela desigualdade MA-MG para 4 valores, sabemos que

$$\sqrt[4]{a^2b^2c^2d^2} \leq \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4} \Leftrightarrow a^2b^2c^2d^2 \leq \left(\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}\right)^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2b^2c^2d^2 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^4 \Leftrightarrow abcd \leq \frac{1}{16}$$

Pela desigualdade MA-MG para dois valores, sabemos que

$$ab+bc+cd+ad+ac+bd \leq \frac{a^2+b^2}{2}+\frac{b^2+c^2}{2}+\frac{c^2+d^2}{2}+\frac{a^2+d^2}{2}+\frac{a^2+c^2}{2}+\frac{b^2+d^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+cd+ad+ac+bd \leq \frac{3(\,a^2+b^2+c^2+d^2)}{2} = \frac{3}{2}$$

Portanto, $a^2b^2cd+ab^2c^2d+abc^2d^2+a^2bcd^2+a^2bc^2d+ab^2cd^2 =$

$$= (ab+bc+cd+ad+ac+bd)abcd \leq \frac{3}{2}\times\frac{1}{16} = \frac{3}{32}$$

Como queríamos mostrar.

11. (Irlanda, 2008) "Sejam x, y, z números reais positivos tais que $xyz \geq 1$. Mostre que $27 \leq (1+x+y)^2+(1+y+z)^2+(1+z+x)^2$ A igualdade dá-se se e só se $x = y = z$."

Proposta de resolução:

$$(1+x+y)^2 = x^2+y^2+2xy+2x+2y+1$$

$$(1+y+z)^2 = y^2+z^2+2yz+2y+2z+1$$

$$(1+z+x)^2 = z^2+x^2+2xz+2x+2z+1$$

$$(1+x+y)^2+(1+y+z)^2+(1+z+x)^2$$
$$= 3+4(x+y+z)+2(xy+yz+xz)+2(x^2+y^2+z^2)$$

Aplicando várias vezes a desigualdade MA-MG para 3 números, sabemos que

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz} \Leftrightarrow x+y+z \geq 3$$

$$\frac{xy+yz+xz}{3} \geq \sqrt[3]{xyyzxz} \Leftrightarrow xy+yz+xz \geq 3$$

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{3} \geq \sqrt[3]{x^2y^2z^2} \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq 3$$

$$\begin{aligned}(1+x+y)^2 + (1+y+z)^2 + (1+z+x)^2 \\ &= 3 + 4(x+y+z) + 2(xy+yz+xz) + 2(x^2+y^2+z^2) \\ &\geq 3 + 4.3 + 2.3 + 2.3 = 27\end{aligned}$$

Como queríamos mostrar.

Por aqui podemos observar que a igualdade acontece quando $x = y = z = 1$.

Tarefas propostas

Tarefa 1

Resumo teórico

Médias: $MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2\,a\,b}{a+b}$, $MG = \sqrt{ab}$, $MA = \frac{a+b}{2}$, $MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Problemas propostos:

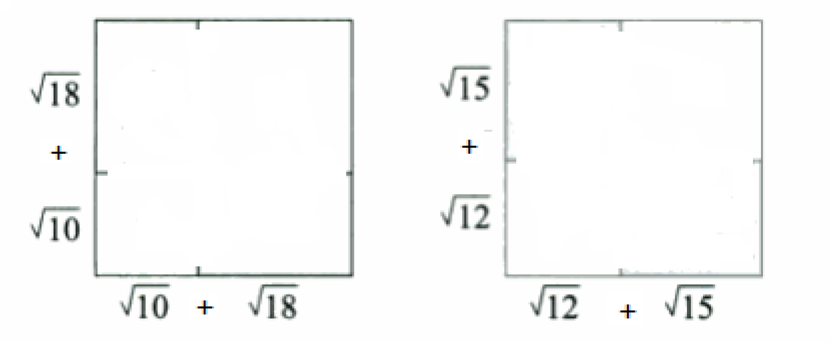
1. Qual é maior $\frac{2010}{2011}$ ou $\frac{2011}{2012}$? Qual a relação de ordem existente entre todas frações do tipo $\frac{x}{x+1}, \forall\, x \in \mathbb{N}$?

2. Para consolidar e compreender as diferentes formas de calcular a média, proponho o seguinte exercício.
   Determine as várias médias entre os seguintes pares de números:

a) 2 e 8;
b) 3 e 12;
c) 4 e 9:
d) 10 e 20.

3. Utilizando as representações geométricas abaixo, verifique qual das somas é maior:

$$\sqrt{10} + \sqrt{18} \text{ ou } \sqrt{12} + \sqrt{15}$$



4. De todos os retângulos com área 1, qual tem o perímetro menor?

5. Sendo a e b os catetos de um triângulo retângulo e c a sua hipotenusa. Utilizando uma representação geométrica, verifique:

$$a + b \leq c\sqrt{2}$$

Tarefa 2

Resumo teórico

Médias: $MH = \frac{1}{\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{2}} = \frac{2\,a\,b}{a+b}$, $MG = \sqrt{ab}$, $MA = \frac{a+b}{2}$, $MQ = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Desigualdade das médias: $\forall\, a,b \geq 0,\ \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$

Problema proposto nas Olimpíadas da matemática Portuguesas (Final nacional 1984/1985):

"A média aritmética de dois números x e y é, como se sabe, $\frac{x+y}{2}$. A média geométricade x e y é $\sqrt{xy}$. A média harmónica de x e y é $\frac{2xy}{x+y}$. Tenta descobrir e demonstrar de que maneira podem-se relacionar estas três médias entre si, usando o símbolo $\leq$."

Tarefa 3

Resumo teórico

Desigualdade de Cauchy: $xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 2xy \underset{\substack{x,y>0 \\ \div xy}}{\Longleftrightarrow} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$

Desigualdade de Cauchy-Schwarz: Para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_n$ e $y_1, y_2, \dots, y_n$ conjuntos de números reais, tem-se

$$x_1\, y_1 + x_2\, y_2 + \cdots + x_n\, y_n \leq \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}\sqrt{{y_1}^2 + {y_2}^2 + \cdots + {y_n}^2}$$

dando-se a igualdade quando $x_i\, y_j = x_j\, y_i$ para $i, j = 1,2, \dots, n$.

Problemas propostos:

1. Mostre que qualquer seja o valor de x, se verifica:

$$\frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 2$$

1. Mostre que para qualquer número real a, b, c:

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$$

2. Problema das Olimpíadas Internacionais de 1987

   "Mostre que se x, y, z são números reais tais que $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, então $x + y + z \leq xyz + 2$."

Tarefa 4

Resumo teórico

Para $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}} \leq \sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leq \frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{{x_1}^2+{x_2}^2+\cdots+{x_n}^2}{n}}$$

Ou seja: $MH \leq MG \leq MA \leq MQ$.

O caso de igualdade verifica-se quando$x_1 = x_2 = \cdots = x_n$.

Problemas propostos

1. De todos os retângulos com a mesma medida de diagonal, determine qual o que tem maior perímetro e qual o que tem maior área.

2. Mostre que para $a, b, c \geq 0$, temos $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$.

3. Verifique, para quaisquer números $x > 1$:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1} > \frac{3}{x}$$

Tarefa 5

Resumo teórico: Sejam $a_1, a_2, \dots, a_n, x_1, x_2, \dots, x_n$, conjuntos de números reais, com $x_1, \dots, x_n > 0$.

$$\frac{{a_1}^2}{x_1} + \frac{{a_2}^2}{x_2} + \cdots + \frac{{a_n}^2}{x_n} \geq \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}$$

Dando-se a igualdade quando $a_1 x_1 = a_2 x_2 = \cdots = a_n x_n$.

Problema propostos

1. Sejam x, y, z números reais positivos . Mostre que:

$$\frac{2}{x+y} + \frac{2}{y+z} + \frac{2}{z+x} \geq \frac{9}{x+y+z}$$

2. Problema das olimpíadas internacionais de 1995.

“Sejam $a, b, c > 0$ tal que $abc = 1$ mostre que :$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{b^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$.”

3. Se a, b, c são medidas dos lados de um triângulo, mostre que

$$\frac{(a+b-c)^4}{b(b+c-a)} + \frac{(b+c-a)^4}{c(c+a-b)} + \frac{(c+a-b)^4}{a(a+b-c)} \geq ab + bc + ca \ .$$

Tarefa 6

Resumo teórico

Método da reordenação: A soma $S = a_1\, b_1 + \; a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n$ é máxima, se as duas sequências $a_1, a_2, \dots, a_n$ e $b_1, b_2, \dots, b_n$ forem ordenadas da mesma forma. Isto é, considerando $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \leq b_2 \leq \cdots \leq b_n$, $a_1\, b_1 + \; a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n \geq a_1\, b_n + \; a_2\, b_1 + \cdots + a_n\, b_2$, por exemplo.

S é mínima, se as sequências forem ordenadas de forma oposta, uma de forma crescente e outra de forma decrescente. Isto é, considerando $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$ e $b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n$, $a_1\, b_1 + \; a_2\, b_2 + \cdots + a_n\, b_n \leq a_1\, b_n + \; a_2\, b_1 + \cdots + a_n\, b_2$, por exemplo.

Problemas propostos

1. $a^3 + \; b^3 + c^3 \geq a^2 b + \; b^2 c + c^2 a$

2. $\frac{a+b+c}{abc} \leq \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$

3. Problema das IMO de 1964

“Suponha que a, b, c são as medidas de lados de um triângulo. Mostre que:

$a^2(b + c - a) + b^2(a + c - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$.”

4. Problema das IMO de 1978

“Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ números inteiros distintos.

Mostre que:$\frac{x_1}{1^2} + \frac{x_2}{2^2} + \cdots + \frac{x_n}{n^2} \geq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.”

Tarefa 7

Problemas propostos em várias competições internacionais de matemática

1. (Balkan Mathematical Olympiad, Reino Unido,2001) “Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc \leq a + b + c$. Mostre que $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{3}abc$.”

2. (Brasil, 2001) “Mostre que $(a + b) + (a + c) \geq 2\sqrt{abc(a + b + c)}$, para todos a, b, c números reais positivos .”

3. (Olimpíada Matemática Rioplatense, Argentina, 2002) “sejam a, b, c números reais positivos. Mostre que
$\left(\frac{a}{b+c} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{b}{c+a} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{c}{a+b} + \frac{1}{2}\right) \geq 1$.”

4. (Ucrânia, 2004)” Sejam a, b, c números reais positivos tais que $abc \geq 1$. Mostre que $a^3 + b^3 + c^3 \geq ab + bc + ca$.”

5. Problema das IMO de 1995

   “Sejam a, b, c números reais positivos com $abc = 1$. Mostre que:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$”

6. (Irlanda, 2008) “ Se os números reais positivos a, b, c, d satisfazem

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$, mostre que

$$a^2b^2cd + ab^2c^2d + abc^2d^2 + a^2bcd^2 + a^2bc^2d + ab^2cd^2 \leq \frac{3}{32}.$$ ”

Propostas de resolução da tarefa 1

1. Um problema deste tipo poderá ser aplicado numa primeira abordagem das desigualdades, tendo no início uma abordagem de frações da unidade, tema mais familiar para os alunos.

Sabendo que:

$$1 = \frac{1}{2011} + \frac{2010}{2011}$$

e

$$1 = \frac{1}{2012} + \frac{2011}{2012}$$

como

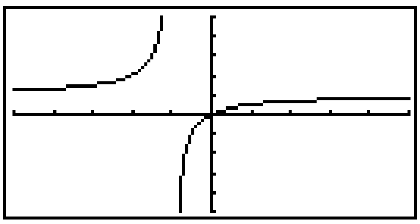
$$\frac{1}{2012} < \frac{1}{2011}$$

então:

$$\frac{2010}{2011} < \frac{2011}{2012}$$

Para uma resposta conjunta à primeira e à segunda questão podemos considerar a função $f(x) = \frac{x}{x+1}$ e estudar a monotonia da mesma.

De um modo simples podemos representar graficamente a função



e verificar que a função é crescente em todo o domínio.

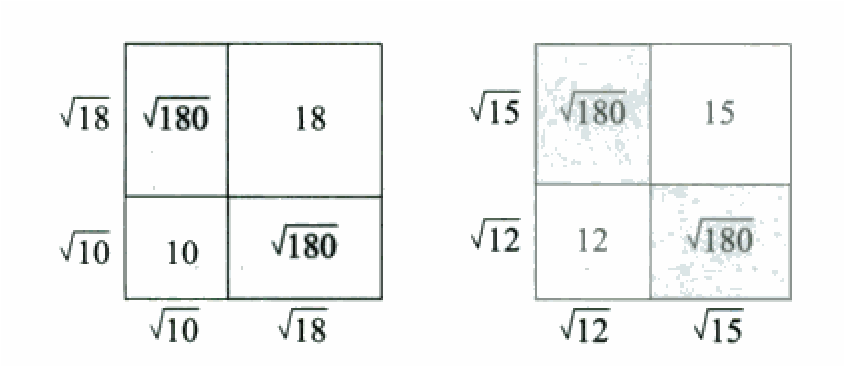
Podemos por isso afirmar que $\forall\, x \in \mathbb{N}$

$$\frac{x}{x+1} < \frac{x+1}{x+2}$$

Se tomarmos $x = 2010$ verificamos que $\frac{2010}{2011} < \frac{2011}{2012}$.

2. Este exercício foi proposto para uma familiarização com o cálculo das médias e permite observar a relação de ordem entre elas.

3. Vamos decompor os dois quadrados, um com medida de lado $\sqrt{10}+\sqrt{18}$ e outro com medida de lado $\sqrt{12}+\sqrt{15}$.



Através desta decomposição podemos verificar que 10 + 18 > 12 + 15, implicando que

que o quadrado de medida de lado $\sqrt{10}+\sqrt{18}$ tem maior área e por isso

$$\sqrt{10}+\sqrt{18}>\sqrt{12}+\sqrt{15}$$

4. Sejam x e y as medidas dos lados do rectângulo. Tem-se $xy=1$ porque a área é igual a 1.

   Se $xy=1 \underset{x\neq 0}{\Longleftrightarrow} y=\frac{1}{x}$

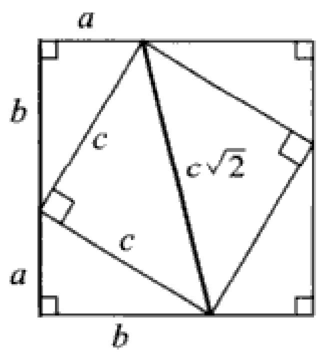
   O perímetro o retângulo é dado pela expressão,

$$2(x+y)=2\left(x+\frac{1}{x}\right)=2\left(\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2+2\right)\geq 4$$

   O perímetro é mínimo quando $\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}=0$, isto acontece quando $x=1$.

   $x=y=1$ e por isso de todos os retângulos com área 1 o que tem menor perímetro é o quadrado de medida de lado 1.

5. Uma representação deste tipo satisfaz a desigualdade: $a+b\leq c\sqrt{2}$



Propostas de resolução da tarefa 3

$$x + y + z \leq xyz + 2 \Leftrightarrow x + y + z - xyz \leq 2$$

$x + y + z - xyz = x(1 - yz) + (y + z) \leq \sqrt{(x^2 + (y+z)^2)}\sqrt{((1 - yz)^2 + 1^2)}$, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Mostrar que $\sqrt{(x^2 + (y+z)^2)}\sqrt{((1 - yz)^2 + 1^2)} \leq 2$ é suficiente.

$$\sqrt{(x^2 + (y+z)^2)}\sqrt{((1 - yz)^2 + 1^2)} \leq 2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + z^2 + 2yz)(2 - 2yz + (yz)^2) \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2 + 2yz)\ (2 - 2yz + (yz)^2) \leq 4 \Leftrightarrow 4 + 2\ (yz)^2 - 4(yz)^2 + 2(yz)^3 \leq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2(yz)^3 \leq 2(yz)^2 \Leftrightarrow yz \leq 1$$

Esta desigualdade verifica-se pois $x^2 + y^2 + z^2 = 2,$ então $y^2 + z^2 \leq 2 \Leftrightarrow \frac{y^2+z^2}{2} \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow yz \leq \frac{y^2+z^2}{2} \leq 1$, pela desigualdade MA-MG.

Mostrámos assim que $x + y + z \leq xyz + 2$.

Para as outras tarefas não são aqui apresentadas propostas de resolução por as mesmas se encontrarem ao longo do desenvolvimento teórico.

Conclusões

O trabalho foi estruturado para que apresentasse numa primeira parte alguma história sobre as desigualdades, noutra parte são apresentados alguns métodos que possam ser entendíveis pelos alunos do secundário e exemplos de aplicação. Foram também selecionados alguns problemas de competições internacionais de matemática, com propostas de resolução e elaboradas tarefas para os alunos realizarem. Apenas foram apresentadas propostas de resolução nas tarefas para os problemas que ainda não tinha sido apresentados anteriormente.

O trabalho realizado centrou-se na pesquisa de várias livros e documentos, tendo como base a resolução de problemas com desigualdades. Existe muito poucos desenvolvimentos em língua portuguesa sobre este tema.

Com os conceitos e resultados pretende-se que os estudantes possam desenvolver capacidades para poderem resolver uma grande parte dos problemas com desigualdades propostos em competições internacionais de matemática, uma vez que nas competições nacionais de matemática surgiu apenas um problema sobre desigualdades, na final das Olimpíadas Portuguesas da Matemática, no ano de 1985.

Da investigação que fiz, tomei conhecimento que a Universidade de Coimbra, tem uma escola de matemática para jovens, chamada Projeto Delfos, que desenvolve conhecimentos e prepara os alunos para participarem nas olimpíadas internacionais da matemática. Também noutras universidades existem cursos de matemática para jovens, que proporciona aos alunos contatarem com a matemática de forma diferente da que têm conhecimento pelos currículos escolares.

A Gulbenkian, apresenta projetos para novos talentos e premeia novos talentos, nomeadamente na área da matemática.

A escola tradicional, não dá oportunidade aos alunos com talento para a matemática, para poderem explorar as suas competências nessa área, pela forma como se encontra o currículo e a organização do ensino secundário. Existem outros países onde existem escolas informais onde se praticam atividades matemáticas, tal como em Portugal existem escolas de atividades desportivas.

É preciso começar a desenvolver nos estudantes dotados e com interesse na matemática o gosto pela resolução de problemas com maior grau de exigência.

Com este trabalho vou apresentar um projeto na escola que leciono para que se possa dar um primeiro passo.

Bibliografia

Claudi Alsina & Roger B. Nelsen, “ WHEN LESS IS MORE Visualizing Basic Inequalities” DOLCIANI MATHEMATICAL EXPOSITIONS #36, 2009.

Edwin Beckenbach, Richard Bellman, *Introduction to Inequalities*, The L.W. Singer Company , New Mathematical Library, 1961.

Radmila Bulajich Manfrino, José Antonio Gomez Ortega e Rogelio Valdez Delgado, *Inequalities, a mathematical Olympiad approach*, Birkhauser Verlag AG, 2009.

T. Andreescu, V.Cartoaje, G.Dospinescu, M. Lascu, *Old and New Inequalities*, GIL Publishing House, 2004.

Arthur Engel, *Problem solving strategies*, Springer, 1997.

Hojoo Lee, *topics in Inequalities – Theorems and Tecniques*, The IMO Compendium Group, Olympiad Training Materials, 2007.

V.M.Tikhomirov, *Stories about Maxima and Minima*, American Mathematical Society, 1990.